## § 5. Тензор 2-го ранга

Для введения понятия тензора используется понятие диады.

***Определение.*** Для любых двух векторов $\mathbf{r}$ и $\mathbf{u}$ введем новый математический объект (не скаляр и не вектор), называемый диадой или диадным произведением $\mathbf{ru} \equiv \vec{\mathbf{r}}\vec{\mathbf{u}}$, не обладающий свойством коммутативности ($\mathbf{ru} \neq \mathbf{ur}$, если $\mathbf{u} \neq \mathbf{r}$), но обладающий свойством линейности:

$$(\lambda^{(1)} + \lambda^{(2)}\mathbf{r}^{(2)})(\beta^{(1)}\mathbf{u}^{(1)} + \beta^{(2)}\mathbf{u}^{(2)}) =$$

$$= \lambda^{(1)}\beta^{(1)}(\mathbf{r}^{(1)}\mathbf{u}^{(1)}) + \lambda^{(2)}\beta^{(1)}(\mathbf{r}^{(2)}\mathbf{u}^{(1)}) + \lambda^{(1)}\beta^{(2)}(\mathbf{r}^{(1)}\mathbf{u}^{(2)}) + \lambda^{(2)}\beta^{(2)}(\mathbf{r}^{(2)}\mathbf{u}^{(2)}). \quad (1.5.1.)$$

Образование диады или диадного произведения из двух векторов можно рассматривать аналогично образованию слова или слога из двух букв. Например, русские буквы "у" и "а" образуют слово "уа", которое уже не является буквой, а представляет новый объект, причем некоммутативный: слово "уа" отличить от слова "ау".

В отличие от слога из букв диада по определению обладает свойством линейности. Это, как будет показано ниже, приводит к тому, что любая диада аналогично вектору может быть представлена в виде разложения по конечному числу (девяти) базисных диад.

Назовем девять диад $\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j \equiv \mathbf{e}_i\mathbf{e}_j \equiv \mathbf{E}_\nu$, где $\nu$ =1, 2,…, 9, базисными диадами.

Благодаря свойству линейности (1.5.1) любая диада $\mathbf{T} = \mathbf{ru}$ можно представить в виде разложения по девяти базисным диадам $\mathbf{E}_\nu$ с девятью коэффициентами $\tau_\nu$, образующим строку из девяти компонент:

$$\mathbf{T} = \mathbf{ru} = r_i\mathbf{e}_i \cdot u_j\mathbf{e}_j = r_i\, u_j(\mathbf{e}_i\, \mathbf{e}_j) = \sum_{\nu=1}^{9} \tau_\nu\, \mathbf{E}_\nu. \quad (1.5.2)$$

Но более удобной и имеющей глубокий смысл является разложение или представление диады по базисным диадам с помощью квадратной матрицы 3 × 3 и «немого» суммирования:

$$\mathbf{T} = \mathbf{ru} = r_iu_j(\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j) = T_{ij}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j \quad (T_{ij} = r_i\, u_j,\ i, j = 1, 2, 3),$$

где компоненты матрицы $T_{ij}$, называются компонентами диады $\mathbf{T}$. Представление диады в системе базисных диад $\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j$ ($i, j$ = 1, 2. 3), определяемой системой координат с базисом заданных координат в виде матрицы порядка 3 × 3 аналогично представлению вектора в виде матрицы строки 1 × 3.

Перейдем к другой системе координат и посмотрим, какие условия необходимы для преобразования компонент $T_{ij}$, чтобы диада, как и вектор осталась инвариантным объектом. В штрихованной системе координат диада представляется в виде

$$T_{ij}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j = T_{ij}\alpha_{ki}\,\mathbf{e}'_k\alpha_{nj}\,\mathbf{e}'_n \;=\; T'_{kn}\,\mathbf{e}'_k\,\mathbf{e}'_n.$$

Отсюда следует, что диада будет инвариантной, если компоненты ее матричного представления по каждому индексу преобразуются аналогично компонентам вектора:

$$T'_{kn} = T_{ij}\alpha_{ki}\alpha_{nj}.$$

Инвариантная диада дает идею введения тензора второго ранга, который, как и вектор используется в механике и физике.

***Определение:*** Тензором (tensor) второго ранга T называются объект, который:

1) в фиксированной системе координат характеризуется девятью числами – компонентами $T_{ij}$, образующими матрицу порядка 3 × 3;

2) при переходе к другой системе координат компонент матрица его компонент преобразуются по закону:

$$T'_{kl} = T_{ij}\alpha_{ki}\alpha_{lj}. \tag{1.5.3}$$

что обеспечивает его инвариантность.

Формулу преобразования компонент тензора 2-го ранга можно представить в следующем виде, учитывая, что $A^{-1} = A^{(T)}$ (см. (1.3.10)):

$$T'_{kl} = \underbrace{\alpha_{ki}T_{ij}}_{(AT)_{kj}}\;\underbrace{\alpha_{lj}}_{\alpha^{(T)}_{jl}} = \left(ATA^{(T)}\right)_{kl}.$$

Таким образом, можно записать матричную формулу преобразования компонент тензора 2-го ранга

$$T' = ATA^{-1} \quad (A^{-1} = A^{(T)}). \tag{1.5.4}$$

Отсюда, учитывая, что определитель произведения квадратных матриц равен произведению определителей, следует, что определитель матрицы T тензора при переходе к другой ортонормированной системе координат не меняется (хотя сама матрица меняется):

$$\det T' = \det(ATA^{-1}) = \det A\ \det T\ \det A^{-1} = \det T$$

$$(\det A\ \det A^{-1} = \det(AA^{-1}) = \det E = 1). \tag{1.5.5}$$

***Определение.*** Суммой двух тензоров (слагаемых) $\mathbf{D} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$ называется тензор, матрица которого в заданной системе координат равна сумме матриц слагаемых тензоров в этой же системе координат:

$$\text{или } D_{ij}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j = A_{ij}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j + B_{ij}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j, \quad D_{ij} = A_{ij} + B_{ij}. \tag{1.5.6}$$

Введенный здесь математический объект в виде тензора также как скаляр и вектор используется в физике и механике. Скаляр и вектор используются для описания уже знакомых нам физических объектов и процессов. В частности, скаляром определяется масса, температура, энергия, деньги и т.д. Вектором определяется перемещение, скорость, ускорение, сила, угловая скорость и т.д. Тензор второго ранга используется для описания таких объектов и процессов как деформация тел и возникающих в теле при деформации механических напряжений. Пока с этими понятиями мы не знакомы, и поэтому в отличие от скаляров и векторов, мы не можем подобрать зрительный или физический образ для тензора и обосновать целесообразность его использования. Это будет сделано ниже.

Аналогичная ситуация с понятием мнимого и комплексного числа. Нетрудно усвоить формальную алгебру комплексных чисел. До 60-х годов это входило даже в программу средней школы. Но до тех пор, пока не изучена теория аналитических функций, теория конформных отображений и их приложение в гидродинамике, электростатике и теплофизике, не ясны практическая значимость теории комплексных чисел и физический образ для этих чисел. До этих пор изучение комплексных чисел будет только “игрой и гимнастикой” для ума.

***Задачи***

1. Исследовать влияние преобразования координат $x_1' = -x_1,\ x_2' = x_2,\ x_3' = x_3$, на компоненты тензора.
2. Как преобразуются компоненты тензора при бесконечно малом вращении, рассмотренном в примере 4 § 2.

## §6. Симметричные и антисимметричные тензоры второго ранга

Важную роль в физике играют симметричные и антисимметричные тензоры.

***Определение:*** Тензор второго ранга **S** называется симметричным, если в какой-либо системе координат матрица его компонент симметрична: $S_{ij} = S_{ji}$,. тензор A называется антисимметричным, если в какой-либо системе координат матрица его компонент антисимметрична: $A_{ij} = -A_{ji}$.

Симметричный тензор характеризуется шестью независимыми компонентами (числами):

$$S_{11}, S_{22}, S_{33}, S_{12} = S_{21,}\ S_{13} = S_{31,}\ S_{23} = S_{32}.$$

Антисимметричный тензор характеризуется тремя независимыми компонентами (числами):

$$A_{12} = -A_{21},\quad A_{13} = -A_{31},\quad A_{23} = -A_{32} \qquad (A_{11} = A_{22} = A_{33} = 0).$$

***Теорема***: Свойства симметрии и антисимметрии сохраняются, или инвариантны при преобразовании координат.

Пусть $S_{ij} = S_{ji}$. Выразим $S'_{kl}$ и $S'_{lk}$:

$$S'_{kl} = \alpha_{ki}\alpha_{lj}\, S_{ij} = \alpha_{ki}\alpha_{lj}\, S_{ji} = \alpha_{ki}\alpha_{lj}\, S_{ij} = \alpha_{lj}\alpha_{ki}\, S_{ji}\,,$$

$$S'_{lk} = \alpha_{lj}\alpha_{ki}\, S_{ji}\,, \text{ то есть } S'_{kl} = S'_{lk}\,.$$

Аналогично доказательство теоремы и для сохранения (инвариантности) свойства антисимметричности тензора A.

***Теорема***: Любой тензор второго ранга можно представить единственным образом в виде суммы симметричного $S_{ij}$ и антисимметричного $A_{ij}$ тензоров:

$$T_{ij} = S_{ij} + A_{ij}\,. \tag{1.6.1}$$

Действительно в заданной системе координат матрицу $T_{ij}$ можно представить в виде:

$$T_{ij} = \tfrac{1}{2}(T_{ij} + T_{ji}) + \tfrac{1}{2}(T_{ij} - T_{ji}) = S_{ij} + A_{ij}\,. \tag{1.6.2}$$

$\tfrac{1}{2}(T_{ij} + T_{ji}) = S_{ij}$ – симметричный тензор второго ранга,

$\tfrac{1}{2}(T_{ij} - T_{ji}) = A_{ij}$ – антисимметричный тензор.

Докажем единственность. Пусть наряду с (1.6.2) также верно, что

$$T_{ij} = \tilde{S}_{ij} + \tilde{A}_{ij} \quad (\tilde{S}_{ij} = \tilde{S}_{ji},\ \tilde{A}_{ij} = \tilde{A}_{ji}). \tag{1.6.3}$$

Рассмотрим $T_{ji} = \tilde{S}_{ji} + \tilde{A}_{ji}$. Вследствие симметричности $\tilde{S}_{ji}$ и антисимметричности $\tilde{A}_{ji}$ имеем

$$T_{ji} = \tilde{S}_{ij} - \tilde{A}_{ij}. \tag{1.6.3a}$$

Сложив это равенство с (1.6.2), получим $T_{ij} + T_{ji} = 2\tilde{S}_{ji}$. Отсюда имеем $\tilde{S}_{ij} = \frac{1}{2}(T_{ij} + T_{ji})$. Аналогично после вычитания (1.6.3a) из (1.6.3) получим $\tilde{A}_{ij} = \frac{1}{2}(T_{ij} - T_{ji})$. Таким образом имеем $\tilde{S}_{ij} = S_{ij}$, $\tilde{A}_{ij} = A_{ij}$.

***Определение.*** Тензор **P** является транспонированным к тензору **T**, если в какой-то системе координат матрицы их компонент являютс я транспонированными: $P_{ij} = T_{ij}^{(\mathrm{T})} = = T_{ji}$.

Имеет место следующая теорема инвариантности свойства симметрии.

***Теорема***: Свойство транспонированности двух тензоров инвариантно при преобразованиях координат.

Доказательство следует из того, что если в одной системе координат тензор **P** является транспонированным тензору **T,** т.е в этой системе координат матрица его компонент P = T$^{(\mathrm{T})}$, (т.е. $P_{ij} = T_{ji}$), то в любой другой системе координат, учитывая (1.5.3), имеем

$$P'_{ij} = \alpha_{ik}\,\alpha_{jl}\,P_{kl} = \alpha_{ik}\,\alpha_{jl}\,T_{lk} = \alpha_{jl}\,\alpha_{ik}\,T_{lk} = T'_{ji}$$

т.е. в любой другой системе координат сохраняется свойство транспонированности матрицы компонент: $P'_{ij} = T'_{ji}$

.

## §7. Понятие тензора n-го ранга

Обобщая определение диадного произведения, можно ввести полиадные произведения (полиады) из трех, четырех и т.д., т.е. любого целого числа ($n$) векторов. В частности, можно ввести базисные полиады $\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j \ldots \mathbf{e}_p$ из $n$ сомножителей, каждый из которых является одним из трех базисных векторов ($\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$). Таким обобщением тензоров 2-го ранга, вводятся тензора третьего, четвертого и любого целочисленного ранга $n$.

***Определение:*** Тензором $n$-го ранга называется математический объект

$\mathbf{T}^{(n)} = T_{ij\,...\,p}\,\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j\,...\,\mathbf{e}_p$, который:

1) в некоторой фиксированной системе координат с базисными векторами $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ характеризуется $3^n$ числами,

2) при переходе к новому базису $\mathbf{e}'_1$, $\mathbf{e}'_2$, $\mathbf{e}'_3$ эти числа меняются по закону, обеспечивающему инвариантность тензора при преобразованиях координат:

$$T'_{ij\dots p} = \alpha_{ik}\,\alpha_{jl}\,\dots\,\alpha_{pr}\;T_{kl\,\dots\,r} \quad (i, j, \dots p, k, l, \dots r = 1, 2, 3). \quad (1.7.1)$$

Обычно верхний индекс, показывающий ранг тензора, опускается ($\mathbf{T}^{(n)} = \mathbf{T}$).

## §8. Операции с тензорами

Используются следующие операции с тензорами.

1. *Сложение*. Оно определено для тензоров одинакового ранга, и заданных в одной системе координат. Если $\mathbf{T} = \mathbf{P} + \mathbf{S}$, то

$$T_{kl\,\dots\,r} = P_{kl\,\dots\,r} + S_{kl\,\dots\,r}\,. \quad (1.8.1)$$

2. *Полиадное произведение*. Если в некоторой системе координат имеются тензор $\mathbf{T} = T_{ij}\,\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j$ и вектор $\mathbf{r} = r_k\,\mathbf{e}_k$, то их полиадное произведение $\mathbf{P} = \mathbf{Tr}$ дает тензор третьего ранга $\mathbf{P} = T_{ij}\,r_k\,\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j\mathbf{e}_k$ . Аналогично определяется полиадное произведение тензоров любого ранга.

*Пример*

В системе координат с базисными векторами $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ заданы два вектора с координатами, заданными в виде матриц строк: $\mathbf{u} = (1, 1, 0)$ и $\mathbf{r} = (0, 1, 1)$. Построить тензор, являющий полиадным произведением $\mathbf{T} = \mathbf{ur}$, т.е. $T_{ij} = u_i\,r_j$ . Убедитесь, что девять компонентов этого тензора заданы в таблице.

| $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1$ | $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$ | $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3$ | $\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1$ | $\mathbf{e}_2\mathbf{e}_2$ | $\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$ | $\mathbf{e}_3\mathbf{e}_1$ | $\mathbf{e}_3\mathbf{e}_2$ | $\mathbf{e}_3\mathbf{e}_3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| $T_{11}$ | $T_{12}$ | $T_{13}$ | $T_{21}$ | $T_{22}$ | $T_{23}$ | $T_{31}$ | $T_{32}$ | $T_{33}$ |

3. *Умножение со сверткой*. Пусть заданы тензор $\mathbf{T}$ и вектор $\mathbf{r}$. Тогда их произведение со сверткой $\mathbf{T}\cdot\mathbf{r}$ определяется следующим образом с использованием символа Кронекера (1.2.7):

$$\mathbf{T}\cdot\mathbf{r} = T_{ij}\,\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j\cdot r_k\,\mathbf{e}_k = T_{ij}\,r_k\,\mathbf{e}_i\,(\mathbf{e}_j\cdot\mathbf{e}_k) = T_{ij}\,r_k\,\delta_{jk}\,\mathbf{e}_i = T_{ij}\,r_j\,\mathbf{e}_i\,. \quad (1.8.2)$$

Очевидно, что так введенное умножение со сверткой удовлетворяет условиям линейности (см. §3) и оно аналогично скалярному произведению двух векторов.

Пусть есть тензор **T** и направление, заданное единичным вектором $\boldsymbol{\mu}$ ($\mu$ = 1). Тогда произведение T · $\boldsymbol{\mu}$ равно

$$\mathbf{T}\cdot\boldsymbol{\mu} = T_{ij}\,\mu_k\,\mathbf{e}_i(\mathbf{e}_j\cdot\mathbf{e}_k) = T_{ij}\,\mu_j\,\mathbf{e}_i = \mathbf{T}_j\,\mu_j \quad (\text{где } \mathbf{T}_j = T_{ij}\,\mathbf{e}_i). \quad (1.8.3)$$

что аналогично (1.2.2) и (1.2.3) можно рассматривать как проекцию тензора T на направление $\boldsymbol{\mu}$, которую будем обозначать как $\mathrm{pr}_\mu$ T. Тензор второго ранга определяется либо девятью числами, либо тремя "векторами-проекциями" $\mathbf{T}_1$, $\mathbf{T}_2$, $\mathbf{T}_3$, на базисные направления $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$.

Тензор $n$-го ранга в трехмерном пространстве аналогично определяется тремя тензорами ранга ($n$ – 1).

Ниже рассмотрены три теоремы о достаточных признаках тензора.

***Теорема 1 (теорема о свертке или умножении).*** Пусть дан тензор третьего ранга A = $A_{ijk}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j\mathbf{e}_k$ и тензор второго ранга B = $B_{mn}\mathbf{e}_m\mathbf{e}_n$**.** Рассмотрим математический объект, в любой системе координат, получаемый сверткой по двум индексам: $c_i = A_{ijk}B_{jk}$. Тогда $c_i\,\mathbf{e}_i$ есть тензор 1-го ранга (вектор).

*Доказательство*. Рассмотрим $c_i'$, равный $A_{ijk}'B_{jk}'$ в другой (штрихованной) системе координат. Тогда, учитывая, что A и B тензора, получим:

$$c_i' = A_{ijk}'B_{jk}' = (\alpha_{il}\,\alpha_{jm}\,\alpha_{kn}\,A_{lmn})(\alpha_{jp}\,\alpha_{kq}\,B_{pq}) = \alpha_{il}\,\delta_{mp}\,\delta_{nq}\,A_{lmn}B_{pq} =$$

$$= \alpha_{il}\,A_{lmn}B_{mn} = \alpha_{il}\,c_l \qquad (\alpha_{jm}\alpha_{jp} = \delta_{mp},\quad \alpha_{kn}\alpha_{kq} = \delta_{nq}).$$

***Теорема 2 (теорема о делении скаляра).*** Пусть в системе координат ($\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$) задан некоторый математический объект $A_{ijk}$, характеризуемый 27 числами и некоторым правилом их преобразования в разных системах координат. Дано, что для любых трех векторов $\mathbf{u} = u_i\,\mathbf{e}_i$, $\mathbf{v} = v_j\,\mathbf{e}_j$, $\mathbf{w} = w_k\mathbf{e}_k$, свертка $A_{ijk}u_i\,v_j\,w_k$ является скаляром. Тогда $A_{ijk}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j\mathbf{e}_k$ – тензор (3-го ранга), т.е. $A_{ijk}$ в разных системах координат преобразуются как компоненты тензора 3-го ранга.

*Доказательство*. Величина $A_{ijk}u_i\,v_j\,w_k$ является скаляром и не меняется при переходе к штрихованной системе координат:

$$A_{ijk}'\,u_i'\,v_j'\,w_k' = A_{ijk}u_i\,v_j\,w_k = A_{pqr}u_p\,v_q\,w_r\,.$$

Так как $u_i\,\mathbf{e}_i$, $v_j\,\mathbf{e}_j$, $w_k\mathbf{e}_k$ – вектора, то

$$u_p = u'_i\alpha_{ip},\ v_q = v'_j\alpha_{jk},\ w_r = w'_k\alpha_{kr}.$$

Тогда

$$A'_{ijk}\,u'_i\,v'_j\,w'_k = A_{pqr}\alpha_{ip}\,\alpha_{jk}\,\alpha_{kr}\,u'_i\,v'_j\,w'_k.$$

Отсюда следует

$$(A'_{ijk} - A_{pqr}\alpha_{ip}\,\alpha_{jk}\,\alpha_{kr})\,u'_i\,v'_j\,w'_k = 0. \tag{1.8.4}$$

Левая часть полученного выражения представляет собой сумму 27 слагаемых. Равенство, справедливое для любых $u'_i$, $v'_j$, $w'_k$ может выполняться, только если

$$A'_{ijk} - A_{pqr}\alpha_{ip}\,\alpha_{jk}\,\alpha_{kr} = 0. \tag{1.8.5}$$

Действительно, пусть $i = 1, j = 2, k = 3$. Возьмем $u_1 = 1$, $v_2 = 1$, $w_3 = 1$, $u_2 = u_3 = v_1 = v_3 = w_1 = w_3 = 0$. Тогда (1.8.1) сводятся к равенству $A'_{123} = A_{pqr}\alpha_{1p}\alpha_{2k}\alpha_{3r}$. Аналогично доказывается (1.8.2) для остальных $i, j, k$.

***Теорема 3 (теорема о делении “вектора”).*** Пусть $A_{ijk}$ – некоторый математический объект, как и в теореме 2. Дано, что для любого тензора В = $B_{mn}\mathbf{e}_m\mathbf{e}_n$ свертка $c_k = A_{ijk}B_{ij}$ дает компоненты вектора. Тогда $A_{jk}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j\mathbf{e}_k$ – тензор (3-го ранга).

Доказательство проводится аналогично предыдущим двум.

Перечисленные три теоремы можно обобщить следующими двумя утверждениями.

1. ***Теорема об умножении.*** Если А и В – тензора, и пусть С = АВ – полиадное произведение с несколькими свертками. Тогда С – тензор.

2. ***Теорема деления.*** Пусть $A_{ij\,\ldots\,k}$ – некоторый математический объект, компоненты которого вычисляются в любых системах координат. Дано, что для любого тензора В полиадные произведения $A_{ij\,\ldots\,k}B_{lm\,\ldots\,n}$ с несколькими свертками дают компоненты тензора, т.е. в разных системах координат преобразуются как компоненты тензора. Тогда $A_{ij\,\ldots\,k}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j\ldots\mathbf{e}_k$ – тензор, т.е. $A_{ij\,\ldots\,k}$ в разных системах координат преобразуются как компоненты тензора.

***Задача***

Рассмотрим физическую величину, определенную в данной прямоугольной декартовой системе координат девятью числами $A_{ij}$. Известно, что при переходе к другой декартовой системе координат для любого вектора $\mathbf{v} = v_j\mathbf{e}_j$ свертка $A_{ij}v_iv_j$ преобразуется как скаляр, т.е. одинакова (инвариантна) во всех системах координат.

Доказать, что величины $A_{ij} + A_{ji}$ представляют компоненты тензора второго ранга.

## § 9. Тензоры Кронекера и Леви-Чевиты

В тензорной алгебре используется единичный тензор Кронекера ($\delta$-тензор) и единичный тензор Леви-Чевита.

***Определение:*** В одном из ортонормированных базисов $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$, тензор Кронекера ($\delta$-тензор второго ранга) определяется единичной матрицей в виде

$$\delta = \delta_{ij}\,\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j\,, \qquad (1.9.1)$$

где $\delta_{ij}$ – символ Кронекера (см. (1.2.2)).

Перейдем к другой (штрихованной) системе координат, чтобы определить, как меняются компоненты $\delta$-тензора:

$$\delta'_{ij} = \alpha_{ik}\,\alpha_{jl}\,\delta_{kl} = \delta_{ij}\,.$$

***Теорема***: Матрица $\delta$-тензора во всех системах координат одна и та же и равна единичной матрице E.

Не меняются (инвариантны) при преобразовании координат все тензора 2-го ранга, образованные умножением $\delta$-тензора на скаляр, т.е. матрицы вида $\mathbf{P} = \lambda\delta$, где $\lambda$ – скаляр. Такие тензоры называются *шаровыми*. Их инвариантные матрицы имеют вид

$$P_{lm} = \lambda\delta_{lm}. \qquad (1.9.2)$$

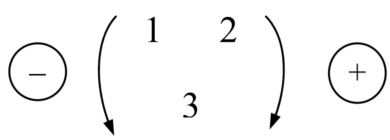
***Определение:*** 27 компонент математического объекта $\varepsilon_{ijk}$, называемого символом Леви-Чевиты, в любой ортогональной системе координат определяются следующим образом:

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1, & \text{если } i,\ j,\ k \text{ дают четную перестановку из } 1, 2, 3; \\ -1, & \text{если } i,\ j,\ k \text{ дают нечетную перестановку из } 1, 2, 3; \\ 0, & \text{во всех других случаях } (i = j, \text{ или } j = k, \text{ или } k = i). \end{cases} \qquad (1.9.3)$$

То есть

$\varepsilon_{123} = \varepsilon_{231} = \varepsilon_{312} = 1,$

$\varepsilon_{132} = \varepsilon_{321} = \varepsilon_{213} = -1,$




а компоненты с повторяющимися индексами равны 0:

$$\varepsilon_{111} = \varepsilon_{112} = \varepsilon_{113} = \varepsilon_{221} = \varepsilon_{222} = \varepsilon_{223} = \varepsilon_{331} = \varepsilon_{332} = \varepsilon_{333} =$$

$$= \varepsilon_{121} = \varepsilon_{131} = \varepsilon_{212} = \varepsilon_{232} = \varepsilon_{313} = \varepsilon_{323} =$$

$$= \varepsilon_{122} = \varepsilon_{133} = \varepsilon_{211} = \varepsilon_{233} = \varepsilon_{311} = \varepsilon_{322} = 0.$$

Докажем, что введенный таким образом математический объект, имеющий 27 компонент, и которые одинаковы во всех системах координат, является тензором 3-го ранга. Выберем произвольным образом 3 вектора:

$$\mathbf{u} = u_i\,\mathbf{e}_i, \quad \mathbf{v} = v_j\,\mathbf{e}_j, \quad \mathbf{w} = w_k\mathbf{e}_k\,.$$

Объем параллелепипеда, построенного на этих векторах, есть определитель.

$$V_{\mathbf{uvw}} = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}. \tag{1.9.4}$$

Объем $V_{\mathbf{uvw}}$ – скаляр и не меняется при преобразованиях координат. При этом $V_{\mathbf{uvw}} > 0$, если ориентация векторов $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ совпадает с ориентацией $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$, в противном случае $V_{\mathbf{uvw}} < 0$.

Непосредственной проверкой можно показать, что определитель в (1.9.4) равен $\varepsilon_{ijk}u_i\,v_j\,w_k$, поэтому

$$V_{\mathbf{uvw}} = \varepsilon_{ijk}u_i\,v_j\,w_k. \tag{1.9.5}$$

Таким образом, $V_{\mathbf{uvw}}$ – свертка математического объекта $\varepsilon_{ijk}$ и компонент тензора $u_iv_jw_k$, и эта свертка для любых векторов $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$, определяющих тензор $u_iv_jw_k\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j\mathbf{e}_k$, является скаляром. Поэтому в соответствие с теоремой о делении скаляра в § 8 следует, что $\mathbf{E} = \varepsilon_{ijk}\,\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j\mathbf{e}_k$ – тензор 3-го ранга, и он будет называться тензором Леви-Чевита или ε-тензором.

Легко видеть, что ε-тензор антисимметричен по перестановке двух индексов:

$$\varepsilon_{ijk} = -\,\varepsilon_{jkj} = \varepsilon_{kij} = -\,\varepsilon_{kji} = \varepsilon_{jki} = -\,\varepsilon_{jik}\,. \tag{1.9.6}$$

Подчеркнем, что как и для δ-тензора, компоненты ε-тензора инвариантны:

$$\varepsilon'_{ijk} = \varepsilon_{ijk}. \tag{1.9.7}$$

Введем следующий объект, соответствующий двум векторам $\mathbf{a} = a_i\,\mathbf{e}_i$ и $\mathbf{b} = b_k\mathbf{e}_k$:

$$\varepsilon_{ijk}\,a_j\,b_k = c_i.$$

Из теоремы 1 об умножении в § 8 следует, что $\mathbf{c} = c_i\,\mathbf{e}_i$ – вектор. Легко видеть, что вектор ортогонален к вектору $\mathbf{a}$ и вектору $\mathbf{b}$.

В самом деле, $\mathbf{a}\cdot\mathbf{c} = a_i c_i = \varepsilon_{ijk} a_j b_k = a_i\varepsilon_{ijk} a_j b_k = \varepsilon_{ijk} a_i a_j b_k = 0$, так как последнее выражение есть определитель с двумя одинаковыми строками. Аналогично $\mathbf{b}\cdot\mathbf{c} = 0$.

Скалярный квадрат вектора $\mathbf{c}$ есть объем параллелепипеда, построенного на векторах $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ . Действительно,

$$c^2 = c_i c_i = c_i\varepsilon_{ijk} a_j b_k = \varepsilon_{ijk}\, c_i a_j b_k = V_{\mathbf{cab}} = V_{\mathbf{abc}} > 0.$$

Так как $V_{\mathbf{abc}} > 0$, то с конца вектора $\mathbf{c}$ поворот вектора $\mathbf{a}$ к вектору $\mathbf{b}$ является поворотом в положительном направлении, т.е. против часовой стрелки. **УТОЧНИТЬ В СВЯЗИ С ЛЕВОЙ И ПРАВОЙ ОРИЕНТАЦИЕЙ $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$,**

С другой стороны, так как вектор $\mathbf{c}$ ортогонален $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, имеем $c^2 = V_{\mathbf{abc}} > S_{\mathbf{ab}}|c|$, где $S_{\mathbf{ab}}$ – площадь параллелограмма, построенного на векторах $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$. Следовательно $|c| = S_{\mathbf{ab}} = |a|\,|b|\sin\langle\mathbf{ab}\rangle$. В итоге имеем, что $\mathbf{c} = [\mathbf{a}\times\mathbf{b}]$.

Таким образом, компоненты векторного произведения могут быть представлены с помощью тензора Леви-Чевита

$$[\mathbf{a}\times\mathbf{b}]_i = \varepsilon_{ijk} a_j b_k. \qquad (1.9.8)$$

Это равенство можно доказать непосредственной проверкой, используя

$$[\mathbf{a}\times\mathbf{b}] = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \varepsilon_{ijk} a_j b_k \mathbf{e}_i\,. \qquad (1.9.9)$$

Рассмотрим объем параллелепипеда (куба) $V_{\mathbf{e}_p\mathbf{e}_q\mathbf{e}_r}$, построенного на базисных единичных векторах $\mathbf{e}_p$, $\mathbf{e}_q$, $\mathbf{e}_r$, которые могут быть представлены в виде

$$\mathbf{e}_p = \delta_{pi}\,\mathbf{e}_i\,, \quad \mathbf{e}_q = \delta_{qj}\,\mathbf{e}_j\,, \quad \mathbf{e}_r = \delta_{rk}\,\mathbf{e}_k\,.$$

Тогда объем $V_{\mathbf{e}_p\mathbf{e}_q\mathbf{e}_r}$ в соответствии с выражением (1.9.5) имеет вид

$$V_{\mathbf{e}_p\mathbf{e}_q\mathbf{e}_r} = \varepsilon_{ijk}\delta_{pi}\delta_{qj}\delta_{rk} = \varepsilon_{pqr}, \qquad (1.9.10)$$

что также непосредственно следует из определения (1.9.3) для $\varepsilon_{ijk}$. Объем параллелепипеда (куба), построенного на $\mathbf{e}_p$, $\mathbf{e}_q$, $\mathbf{e}_r$, может быть выражен также в виде определителя

$$V_{\mathbf{e}_p\mathbf{e}_q\mathbf{e}_r} = \begin{vmatrix} \delta_{p1} & \delta_{p2} & \delta_{p3} \\ \delta_{q1} & \delta_{q2} & \upsilon_{q3} \\ \delta_{r1} & \delta_{r2} & \delta_{r3} \end{vmatrix}. \qquad (1.9.11)$$

В итоге получим, что компоненты $\boldsymbol{\varepsilon}$-тензора могут быть выражены через компоненты $\delta$-тензора в виде определителя

$$\varepsilon_{pqr} = \begin{vmatrix} \delta_{p1} & \delta_{p2} & \delta_{p3} \\ \delta_{q1} & \delta_{q2} & \delta_{q3} \\ \delta_{r1} & \delta_{r2} & \delta_{r3} \end{vmatrix}. \qquad (1.9.12)$$

Рассмотрим произведение

$$\varepsilon_{ijk}\,\varepsilon_{lmn} = \overbrace{\begin{vmatrix} \delta_{i1} & \delta_{i2} & \delta_{i3} \\ \delta_{j1} & \delta_{j2} & \delta_{j3} \\ \delta_{k1} & \delta_{k2} & \delta_{k3} \end{vmatrix}}^{|\mathbf{A}_{ijk}|} \cdot \overbrace{\begin{vmatrix} \delta_{l1} & \delta_{l2} & \delta_{l3} \\ \delta_{m1} & \delta_{m2} & \delta_{m3} \\ \delta_{n1} & \delta_{n2} & \delta_{n3} \end{vmatrix}}^{|\mathbf{B}_{lmn}|} = |\mathrm{A}_{ijk}| \cdot |\mathrm{B}_{lmn}|.$$

Транспонирование второго определителя не меняет его значения

$$\varepsilon_{ijk}\,\varepsilon_{lmn} = \begin{vmatrix} \delta_{i1} & \delta_{i2} & \delta_{i3} \\ \delta_{j1} & \delta_{j2} & \delta_{j3} \\ \delta_{k1} & \delta_{k2} & \delta_{k3} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \delta_{l1} & \delta_{m1} & \delta_{n1} \\ \delta_{l2} & \delta_{m2} & \delta_{n2} \\ \delta_{l3} & \delta_{m3} & \delta_{n3} \end{vmatrix}. \qquad (1.9.13)$$

Произведение определителей двух матриц $\mathbf{A}_{ijk}$ и $\mathbf{B}_{lmn}$ равно определителю матрицы, являющейся произведением этих двух матриц $|\mathbf{A}_{ijk}|\cdot|\mathbf{B}_{lmn}|=|\mathbf{C}_{ijklmn}|$, где $\mathbf{C}_{ijklmn} = \mathbf{A}_{ijk}\ \mathbf{B}_{lmn}$. Следует иметь в виду, что элементы матрицы $\mathbf{A}_{ijk}$ определяются координатными индексами $i, j, k$, элементы матрицы $\mathbf{B}_{lmn}$ определяются координатными индексами $l, m, n$, а элементы матрицы $\mathbf{C}_{ijklmn}$ определяются координатными индексами $i, j, k, l, m, n$. Для упрощения записей и чтобы избежать путаницы, эти элементы будем обозначать буквой $c^{rs}$, где верхние индексы $rs$ = 11, 12, 13, … , 32, 33 указывают положение элемента в матрице $\mathbf{C}_{ijklmn}$. Тогда для $c^{11}$ имеем в соответствии с правилом умножения матриц

$$c^{11} = \delta_{i1}\delta_{l1} + \delta_{i2}\delta_{l2} + \delta_{i3}\delta_{l3} = \delta_{ip}\delta_{lp} = \delta_{il}.$$

Аналогично и для остальных компонент $c^{rs}$ матрицы **C**. В результате получим

$$\varepsilon_{ijk}\,\varepsilon_{lmn} = \begin{vmatrix} \delta_{ip}\delta_{lp} & \delta_{ip}\delta_{mp} & \delta_{ip}\delta_{np} \\ \delta_{jp}\delta_{lp} & \delta_{jp}\delta_{mp} & \delta_{jp}\delta_{np} \\ \delta_{kp}\delta_{lp} & \delta_{kp}\delta_{mp} & \delta_{kp}\delta_{np} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \delta_{il} & \delta_{im} & \delta_{in} \\ \delta_{jl} & \delta_{jm} & \delta_{jn} \\ \delta_{kl} & \delta_{km} & \delta_{kn} \end{vmatrix}. \qquad (1.9.14)$$

Раскрывая определитель, получим

$$\varepsilon_{ijk}\,\varepsilon_{lmn} = \delta_{il}\delta_{jm}\delta_{kn} + \delta_{im}\delta_{jn}\delta_{kl} + \delta_{jl}\delta_{km}\delta_{in} - \delta_{kl}\delta_{jm}\delta_{in} - \delta_{km}\delta_{jn}\delta_{il} - \delta_{jl}\delta_{im}\delta_{kn}. \quad (1.9.15)$$

Отсюда для свертки по трем индексам $l = i, m = j, n = k$:

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijk} = \delta_{ii}\delta_{jj}\delta_{kk} + \delta_{ij}\delta_{jk}\delta_{ik} + \delta_{ji}\delta_{kj}\delta_{ik} - \delta_{kl}\delta_{jj}\delta_{ik} - \delta_{kj}\delta_{jk}\delta_{ii} - \delta_{ji}\delta_{ij}\delta_{kk} =$$

$$= 3\cdot3\cdot3 + \delta_{ii} + \delta_{ii} - \delta_{ii}\delta_{jj} - \delta_{kk}\delta_{ii} - \delta_{ii}\delta_{kk} =$$

$$= 27 + 3 + 3 - 3\cdot3 - 3\cdot3 - 3\cdot3 = 6. \qquad (1.9.16)$$

Кстати, этот же результат следует из того, что среди 27 компонент $\varepsilon_{ijk}$ три компоненты равны 1, три компоненты равны –1, а остальные 21 компоненты равны нулю. Поэтому

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijk} = 3(1\cdot1) + 3(-1)(-1) = 6.$$

Рассмотрим в соответствии с (1.9.15) свертку по двум индексам: $m = j$, $n = k$

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ljk} = \delta_{il}\delta_{jj}\delta_{kk} + \delta_{ij}\delta_{jk}\delta_{kl} + \delta_{jl}\delta_{kj}\delta_{ik} - \delta_{kl}\delta_{jj}\delta_{ik} - \delta_{kj}\delta_{jk}\delta_{il} - \delta_{jl}\delta_{ij}\delta_{kk} =$$

$$= 9\delta_{il} + \delta_{jl} + \delta_{jl} - 3\delta_{il} - 3\delta_{il} - 3\delta_{jl} = 2\delta_{il} \qquad (1.9.17)$$

и свертку по одному индексу: $n = k$

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmk} = \delta_{il}\delta_{jm}\delta_{kk} + \delta_{im}\delta_{jk}\delta_{kl} + \delta_{jl}\delta_{km}\delta_{ik} - \delta_{kl}\delta_{jm}\delta_{ik} - \delta_{km}\delta_{jk}\delta_{il} - \delta_{jl}\delta_{im}\delta_{kk} =$$

$$= 3\delta_{il}\delta_{jm} + \delta_{im}\delta_{jl} + \delta_{jl}\delta_{im} - \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{jm}\delta_{il} - 3\delta_{jl}\delta_{im} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}. \quad (1.9.18)$$

Таким образом, имеют место следующие формулы

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijk} = 6, \qquad (1.9.19)$$

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijn} = \varepsilon_{kij}\varepsilon_{nij} = 2\delta_{kn}, \qquad (1.9.20)$$

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmk} \equiv \varepsilon_{kij}\varepsilon_{klm} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}. \qquad (1.9.21)$$

Для запоминания:

$$\begin{pmatrix} k & i & j \\ k & l & m \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} i & j \\ \downarrow & \downarrow \\ l & m \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} i & j \\ & \times & \\ l & m \end{pmatrix}.$$

***Определение***: Тензор называется изотропным, если он имеет одни и те же компоненты в любой декартовой системе координат или, другими словами, его компоненты инвариантны при ортогональных преобразованиях декартовой системы координат

$$T'_{ij\ldots l} = T_{ij\ldots}. \tag{1.9.22}$$

Все скаляры, т.е. все тензоры нулевого ранга, являются изотропными тензорами.

Изотропными тензорами являются δ-тензор и ε-тензор.

***Теорема:*** Всякий изотропный тензор второго ранга Р является шаровым, т.е. имеет вид

$$\mathrm{P} = p\delta \quad \text{или} \quad p_{ij} = \delta_{ij}. \tag{1.9.23}$$

Доказательство следует из условия инвариантности компонент тензора в системах координат, повернутых друг относительно друга на 90°, например, вокруг оси $x_3$:

$$x'_1 = x_2, \quad x'_2 = -x_1, \quad x'_3 = x_3, \tag{1.9.24}$$

когда матрицы преобразования имеет вид

$$(\alpha) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{array}{lll} \alpha_{11} = 0, & \alpha_{12} = 1, & \alpha_{13} = 0, \\ \alpha_{21} = -1, & \alpha_{22} = 0, & \alpha_{23} = 0, \\ \upsilon_{31} = 0, & \alpha_{32} = 0, & \alpha_{33} = 1. \end{array} \tag{1.9.25}$$

В этом случае из условия инвариантности и формулы преобразования компонент тензора (1.5.3) имеем

$$\begin{aligned} p_{11} &= p'_{11} = \alpha_{1k}\,\alpha_{1l}\,p_{kl} = \alpha_{12}\,\alpha_{12}\,p_{22} = p_{22}, \\ p_{12} &= p'_{12} = \alpha_{1k}\,\alpha_{2l}\,p_{kl} = \alpha_{12}\,\alpha_{21}\,p_{21} = -p_{21}, \\ p_{13} &= p'_{13} = \alpha_{1k}\,\alpha_{3l}\,p_{kl} = \alpha_{12}\,\alpha_{33}\,p_{23} = p_{23}, \\ p_{23} &= p'_{23} = \alpha_{2k}\,\alpha_{3l}\,p_{kl} = \alpha_{21}\,\alpha_{33}\,p_{13} = -p_{13}, \\ p_{32} &= p'_{32} = \alpha_{3k}\,\alpha_{2l}\,p_{kl} = \alpha_{33}\,\alpha_{21}\,p_{31} = -p_{31}. \end{aligned} \tag{1.9.26}$$

Уравнения для остальных компонент не дают новых соотношений. Из первого, третьего и четвертого уравнений следует

$$p_{13} = p_{23} = -\,p_{13} = 0,\ \ p_{11} = p_{22} = p, \quad p_{12} = -\,p_{21}\,, p_{32} = -\,p_{31}. \quad (1.9.27)$$

и матрица изотропного тензора Р имеет вид

$$(p_{ij}) = \begin{pmatrix} p & p_{12} & 0 \\ -p_{12} & p & 0 \\ p_{31} & -p_{31} & p_{33} \end{pmatrix}. \qquad (1.9.28)$$

Далее рассмотрим преобразование вращения на 90° вокруг оси $x_2$:

$$x_1' = -x_3, \quad x_2' = x_2, \quad x_3' = x_1, \qquad (1.9.29)$$

когда матрица преобразования имеет вид

$$(\alpha) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} \alpha_{11} = 0, & \alpha_{12} = 0, & \alpha_{13} = -1, \\ \alpha_{21} = 0, & \alpha_{22} = 1, & \alpha_{23} = 0, \\ \alpha_{31} = 1, & \alpha_{32} = 0, & \alpha_{33} = 0. \end{matrix} \qquad (1.9.30)$$

Тогда аналогично (1.8.23) имеем

$$\begin{aligned} p_{11} &= p_{11}' = \alpha_{1k}\,\alpha_{1l}\,p_{kl} = \alpha_{13}\,\alpha_{13}\,p_{33} = p_{33}\,, \\ p_{12} &= p_{12}' = \alpha_{1k}\,\alpha_{2l}\,p_{kl} = \alpha_{13}\,\alpha_{22}\,p_{32} = p_{32}\,, \\ p_{13} &= p_{13}' = \alpha_{1k}\,\alpha_{3l}\,p_{kl} = \alpha_{13}\,\alpha_{31}\,p_{23} = -p_{31}\,, \qquad (1.9.31) \\ p_{21} &= p_{21}' = \alpha_{2k}\,\alpha_{1l}\,p_{kl} = \alpha_{22}\,\alpha_{13}\,p_{23} = -p_{23}\,, \end{aligned}$$

Из этих уравнений с учетом (1.9.28) имеем

$$p_{11} = p_{22} = p_{33}\,, p_{13} = -p_{31} = -p_{32} = 0, \quad p_{12} = -p_{21} = p_{32} = 0, \qquad (1.9.32)$$

и матрица изотропного тензора Р в соответствии с (1.9.28) и (1.9.32) принимает вид, который требовалось доказать.

$$(p_{ij}) = \begin{pmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & p \end{pmatrix}, \quad \mathrm{P} = p\delta \quad \text{или} \quad p_{ij} = \delta_{ij}\,. \qquad (1.9.33)$$

Нетрудно доказать следующую теорему.

***Теорема:*** Изотропный тензор первого ранга (вектор) – всегда нулевой.

Далее для вычисления определителя матрицы 3 × 3 с использованием немого суммирования и символа Леви-Чевиты будут использоваться два вида формул для вычисления определителя матрицы 3 × 3. В соответствии с (1.9.4), (1.9.5) имеем

$$\det(T_{ij}) = \varepsilon_{ijk}\, T_{1i}\, T_{2j}\, T_{3k} = \varepsilon_{ijk}\, T_{2i}\, T_{3j}\, T_{1k} = \varepsilon_{ijk}\, T_{3i}\, T_{1j}\, T_{2k} =$$

$$= -\,\varepsilon_{ijk}\, T_{2i}\, T_{1j}\, T_{3k} = -\,\varepsilon_{ijk}\, T_{3i}\, T_{2j}\, T_{1k} = -\,\varepsilon_{ijk}\, T_{1i}\, T_{3j}\, T_{2k} \qquad (1.9.34)$$

Тогда можно показать, что

$$\det(T_{ij}) = \tfrac{1}{6}\, \varepsilon_{pqr}\varepsilon_{ijk}\, T_{pi}\, T_{qj}\, T_{rk}\,. \qquad (1.9.35)$$