

## § 9. Уравнения на поверхности разрыва в сплошной среде

Как и в случае непрерывных дифференцируемых функций, использование поверхностей разрыва и разрывных, а точнее, кусочно-непрерывных функций в механике сплошной среды, моделирующих распределение масс (плотностей), импульсов (скоростей), внутренних энергий, внутренних напряжений, температур и других физических параметров, является приближенной моделью или схемой реальных физических процессов в газах, жидкостях, твердых телах и т.д. Концепция поверхностей разрыва с кусочно-непрерывными функциями оказывается очень плодотворной и полезной при описании процессов на межфазных границах и процессов при взрывах и ударах.

В механике сплошной среды выделяют поверхности сильного и слабого разрыва.

**Определение.** Поверхность, при переходе через которую все рассматриваемые функции непрерывны, но разрывны некоторые их производные по координатам или по времени, называются *поверхностями слабого разрыва*.

**Определение.** Поверхность, при переходе через которую терпят разрыв некоторые из рассматриваемых функций (плотность, скорость, напряжение, температура и т.д.) называется *поверхностью сильного разрыва*.

В общем случае форма и перемещение поверхности разрыва заранее не известны и должны быть найдены при решении задачи. Ниже будут выведены уравнения сохранения на поверхностях сильного разрыва.

Рассмотрим окрестность точки  $P$ , лежащей на поверхности сильного разрыва  $\Sigma$  и перемещающейся вместе с  $\Sigma$ . В каждой точке поверхности разрыва  $\Sigma$  некоторые параметры имеют по два значения. С одной стороны поверхности  $\Sigma$  значения параметров плотности, скорости, напряжения, внутренней энергии и т.д. в данной точке будем обозначать соответственно через  $\rho^{(1)}$ ,  $\mathbf{v}^{(1)}$ ,  $\sigma_{kl}^{(1)}$ ,  $\mathbf{u}^{(1)}$ , ... , т.е. отмечать верхним индексом (1), а с другой стороны  $\rho^{(2)}$ ,  $\mathbf{v}^{(2)}$ ,  $\sigma_{kl}^{(2)}$ ,  $\mathbf{u}^{(2)}$ , ... , т.е. отмечать верхним индексом (2). Соответственно с

одной стороны имеем зону (1), а с другой – зону (2). То, что  $\Sigma$  – поверхность сильного разрыва означает, что какие-то из параметров (используемых в механике сплошной среды) в точках на поверхности  $\Sigma$  с разных сторон этой поверхности не равны между собой. Например, в точке  $P$  имеем  $\rho^{(1)} \neq \rho^{(2)}$  или  $\mathbf{v}^{(1)} \neq \mathbf{v}^{(2)}$ , или  $\sigma_{kl}^{(1)} \neq \sigma_{kl}^{(2)}$  и т.д. При этом вдоль поверхности  $\Sigma$  все функции:  $\rho^{(1)}, \mathbf{v}^{(1)}, \sigma_{kl}^{(1)}, \mathbf{u}^{(1)}, \dots, \rho^{(2)}, \mathbf{v}^{(2)}, \sigma_{kl}^{(2)}, \mathbf{u}^{(2)}, \dots$  меняются непрерывным образом, т.е. являются непрерывными.

В каждой точке рассматриваемой поверхности разрыва  $\Sigma$ , в том числе и в точке  $P$  под единичной нормалью к ней  $\mathbf{n}^{(1)}$  будет иметься в виду нормаль, внешняя к зоне (1), а под единичной нормалью  $\mathbf{n}^{(2)}$  будет иметься в виду нормаль, внешняя к зоне (2), т.е. противоположная к  $\mathbf{n}^{(1)}$ :

$$\mathbf{n}^{(1)} = -\mathbf{n}^{(2)}. \quad (5.9.1)$$

При этом под  $\Sigma^{(1)}$  будем иметь в виду поверхность  $\Sigma$  с внешней единичной нормалью  $\mathbf{n}^{(1)}$ , а под  $\Sigma^{(2)}$  – поверхность  $\Sigma$  с внешней единичной нормалью  $\mathbf{n}^{(2)}$ .

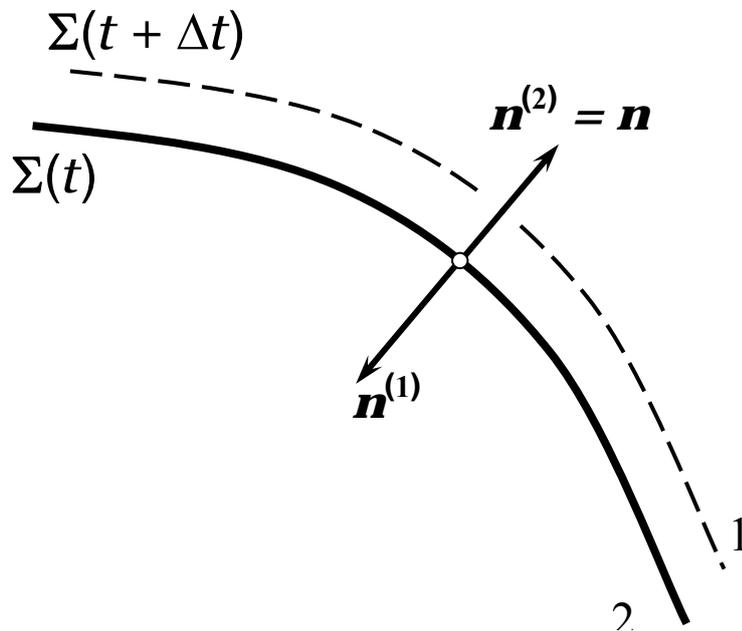


Рис. 5.9.1. Схема поверхности разрыва

Нормальную скорость перемещения поверхности  $\Sigma$  относительно нормали  $\mathbf{n}^{(1)}$ , т.е. нормальную скорость перемещения поверхности  $\Sigma^{(1)}$  (см. (5.1.3.) и (5.1.17)) обозначим через  $N^{(1)}$ , а нормальную скорость перемещения

поверхности  $\Sigma$  относительно нормали  $\mathbf{n}^{(2)}$ , т.е. нормальную скорость перемещения поверхности  $\Sigma^{(2)}$  обозначим через  $N^{(2)}$ .

Ниже будет использоваться и общая нормаль  $\mathbf{n}$  на поверхности  $\Sigma$ , и общая нормальная скорость  $N$  перемещения поверхности  $\Sigma$ , и общий вектор скорости  $\mathbf{N} = N\mathbf{n}$  перемещения поверхности  $\Sigma$ .

В качестве общей нормали  $\mathbf{n}$  выберем ту, которая направлена из объема  $V^{(2)}$  в объем  $V^{(1)}$ , т.е. является внешней к объему  $V^{(2)}$ , что можно записать в виде  $\Sigma = \Sigma^{(2)}$ . Таким образом, примем

$$\mathbf{x} \in \Sigma: \quad \mathbf{n} = \mathbf{n}^{(2)} = -\mathbf{n}^{(1)}, \quad N = N^{(2)} = -N^{(1)}, \quad \mathbf{N} = N\mathbf{n}. \quad (5.9.2)$$

**Эйлеров объем около поверхности разрыва.** Любой поверхности разрыва  $\Sigma$  можно поставить в соответствие произвольный фиксированный в системе координат наблюдателя эйлеров объем  $V_E$ , содержащий эту поверхность и разделяемый поверхностью  $\Sigma$  на два объема:  $V^{(1)}$  и  $V^{(2)}$ , которые из-за перемещения  $\Sigma$  являются переменными во времени. Пересечение поверхности  $\Sigma$  с ограничивающей объем  $V_E$  поверхностью  $S_E$  дает замкнутую линию  $L$ , которая делит граничную поверхность  $S_E$  на две части:  $S^{(1)}$  и  $S^{(2)}$ , переменные во времени в отличие от  $S_E$ . В итоге имеем

$$V_E = V^{(1)}(t) + V^{(2)}(t), \quad S_E = S^{(1)}(t) + S^{(2)}(t). \quad (5.9.3)$$

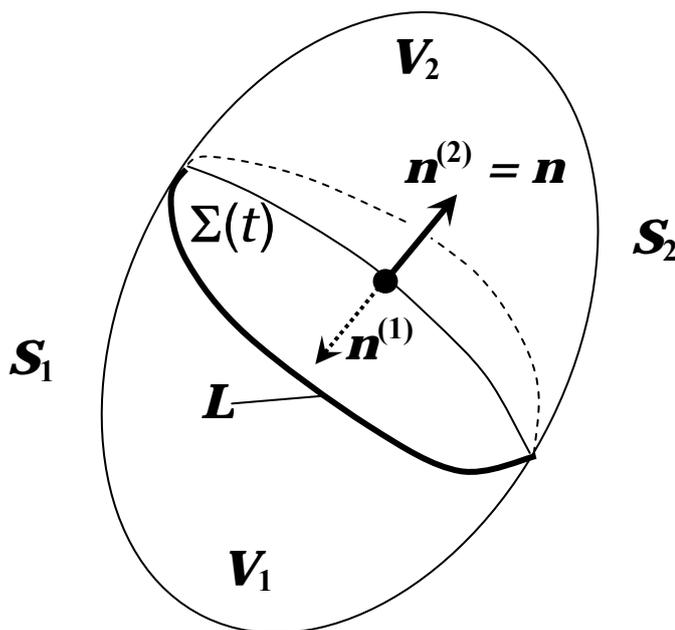


Рис 5.9.2. Схема эйлерова объема  $V_E$  вокруг поверхности разрыва.

Будем иметь в виду, что объем  $V^{(1)}$  ограничен поверхностью  $S^{(1)} + \Sigma^{(1)}$ , а объем  $V^{(2)}$  – поверхностью  $S^{(2)} + \Sigma^{(2)}$ .

**Аддитивность, обыкновенные (классические) поверхности разрыва, поверхностная фаза.** В большинстве случаев можно принять аддитивность массы, импульса, энергии и сил, приложенных к веществу внутри объема  $V_E = V^{(1)}(t) + V^{(2)}(t)$ , ограниченного поверхностью  $S_E = S^{(1)}(t) + S^{(2)}(t)$ , которые разделены поверхностью  $\Sigma$ , которая не вносит свой вклад в массу, импульс и энергию среды:

$$\begin{aligned}
 \int_V \rho dV &= \int_{V^{(1)}} \rho dV + \int_{V^{(2)}} \rho dV; & \int_V \rho \mathbf{v} dV &= \int_{V^{(1)}} \rho \mathbf{v} dV + \int_{V^{(2)}} \rho \mathbf{v} dV; \\
 \int_S q_k n_k ds &= \int_{S^{(1)}} q_k n_k ds + \int_{S^{(2)}} q_k n_k ds; & & (5.9.4) \\
 \int_V \rho F dV &= \int_{V^{(1)}} \rho F dV + \int_{V^{(2)}} \rho F dV. \\
 \int_V \rho u dV &= \int_{V^{(1)}} \rho u dV + \int_{V^{(2)}} \rho u dV; \\
 \int_S \boldsymbol{\sigma}_k n_k ds &= \int_{S^{(1)}} \boldsymbol{\sigma}_k n_k ds + \int_{S^{(2)}} \boldsymbol{\sigma}_k n_k ds; \\
 \int_S (\boldsymbol{\sigma}_n \cdot \mathbf{v}) ds &= \int_{S^{(1)}} (\boldsymbol{\sigma}_n \cdot \mathbf{v}) ds + \int_{S^{(2)}} (\boldsymbol{\sigma}_n \cdot \mathbf{v}) ds;
 \end{aligned}$$

Эти соотношения означают, что наличие поверхности разрыва  $\Sigma$  не нарушает аддитивности массы, импульса, энергии, внешних объемных сил и источников энергии *по объему* и аддитивности потока массы, потока импульса, поверхностных сил и потоков энергии *по поверхностям*. Другими словами это означает отсутствие сосредоточенных поверхностных и точечных масс, импульса, энергии, внешнего воздействия на особой поверхности  $\Sigma$  и сосредоточенного внешнего воздействия вдоль линии  $L$ , являющейся внешней границей поверхности  $\Sigma$  на граничной поверхности  $S_E$ .

**Определение.** Поверхности, которые не вносят вклад в массу, импульс

и энергию объема, и через их линейную границу нет переноса массы, импульса и энергии, называются *обыкновенными*.

В отличие от обыкновенных поверхностей разрыва в некоторых разделах механики и физики сплошных сред используются более общие *неклассические* поверхности разрыва. В частности, такое обобщение требуется при анализе капиллярных эффектов на границах, разделяющих две фазы (газ и жидкость, газ и твердое тело и т. д.). В этом случае Гиббс предложил вводить в анализ поверхность разрыва в виде межфазной границы с нулевой массой, импульсом, но с поверхностной энергией  $U_\Sigma$  и поверхностным натяжением  $\Sigma$  и работой капиллярных сил вдоль ограничивающей поверхность  $\Sigma$  замкнутой линии  $L$ :

$$\begin{aligned} \int_V \rho dV &= \int_{V^{(1)}} \rho dV + \int_{V^{(2)}} \rho dV; \\ \int_V \rho \mathbf{v} dV &= \int_{V^{(1)}} \rho \mathbf{v} dV + \int_{V^{(2)}} \rho \mathbf{v} dV; \quad \int_V \rho F dV = \int_{V^{(1)}} \rho F dV + \int_{V^{(2)}} \rho F dV. \\ \int_V \rho u dV &= \int_{V^{(1)}} \rho u dV + \int_{V^{(2)}} \rho u dV + \int_\Sigma U_\Sigma ds; \\ \int_{S_E} \sigma_k n_k ds &= \int_{S^{(1)}} \sigma_k n_k ds + \int_{S^{(2)}} \sigma_k n_k ds + \int_L \Sigma dl. \end{aligned} \quad (5.9.5)$$

Такие поверхности разрыва называются *капиллярными* или *поверхностной фазой*.

В механике дисперсных сред вводят также поверхности разрыва с сосредоточенной массой типа "*пелены*", характеризуемой поверхностной плотностью  $R_\Sigma$ :

$$\int_V \rho dV = \int_{V^{(1)}} \rho dV + \int_{V^{(2)}} \rho dV + \int_\Sigma R_\Sigma ds. \quad (5.9.6)$$

Далее ограничимся классическими поверхностями разрыва, для которых

$$R_\Sigma = 0, \quad U_\Sigma = 0, \quad \Sigma = 0. \quad (5.9.7)$$

**Интегральное уравнение сохранения на поверхности разрыва.** Для

обыкновенных поверхностей разрыва, для которых справедливо (5.9.4), интегральное уравнение баланса (5.8.18) в обобщенных переменных может быть записано, учитывая разбиение  $V_E$  и  $S_E$  соответственно на  $V^{(1)}$  и  $V^{(2)}$ , а также  $S^{(1)}$  и  $S^{(2)}$  в виде

$$\frac{d}{dt} \left[ \int_{V^{(1)}(t)} \rho f dV + \int_{V^{(2)}(t)} \rho f dV \right] = \quad (5.9.8)$$

$$\int_{S^{(1)}} (-\rho v_k f + \psi_k) n_k ds + \int_{S^{(2)}} (-\rho v_k f + \psi_k) n_k ds + \int_{V^{(1)}} \rho F dV + \int_{V^{(2)}} \rho F dV.$$

Внутри объемов  $V^{(1)}$  и  $V^{(2)}$  все функции непрерывно-дифференцируемы.

Производные от интегралов по переменным объемам  $V^{(1)}(t)$  и  $V^{(2)}(t)$  в с использованием теоремы дифференцирования интеграла (5.1.5) и учитывая, что объемы  $V^{(i)}$  ограничены поверхностями  $S^{(i)} + \Sigma^{(i)}$  ( $i = 1, 2$ ), можно представить в виде

$$\frac{d}{dt} \int_{V^{(1)}(t)} \rho f dV = \int_{V^{(1)}} \frac{\partial}{\partial t} (\rho f) dV + \int_{S^{(1)}} \rho f N ds + \int_{\Sigma^{(1)}} \rho f N ds,$$

$$\frac{d}{dt} \int_{V^{(2)}(t)} \rho f dV = \int_{V^{(2)}} \frac{\partial}{\partial t} (\rho f) dV + \int_{S^{(2)}} \rho f N ds + \int_{\Sigma^{(2)}} \rho f N ds. \quad (5.9.8)$$

Нормальная скорость перемещения  $N$  везде на фиксированной поверхности  $S_E$ , в том числе, и на ее частях  $S^{(1)}(t)$  и  $S^{(2)}(t)$  равна нулю, т.е.

$$x \in S^{(1)}, \quad x \in S^{(2)}: \quad N = 0, \quad (5.9.9)$$

и вторые интегралы в правых частях (5.9.8) равны нулю. Кроме того, на поверхностях  $\Sigma^{(1)}$  и  $\Sigma^{(2)}$  нормальные скорости равны соответственно  $N^{(1)}$  и  $N^{(2)}$

$$x \in \Sigma^{(1)}: \quad N = N^{(1)}, \quad x \in \Sigma^{(2)}: \quad N = N^{(2)}. \quad (5.9.10)$$

Что касается первых объемных интегралов по объемам  $V^{(1)}$  и  $V^{(2)}$  от частной производной по времени, то учтем, что во всех точках внутри этих объемов за исключением только граничных точек на поверхностях разрыва  $\Sigma^{(1)}$  и  $\Sigma^{(2)}$  выполняется дифференциальное уравнение (5.8.20):

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho f) = \nabla_k (-\rho f v_k + \psi_k) + \rho F. \quad (5.9.11)$$

Интегрируя это уравнение отдельно по объемам  $V^{(1)}$  и  $V^{(2)}$ , получим

$$\int_{V^{(i)}} \frac{\partial}{\partial t} (\rho f) dV = \int_{V^{(i)}} \nabla_k (-\rho f v_k + \psi_k) dV + \int_{V^{(i)}} \rho F dV \quad (i = 1, 2). \quad (5.9.12)$$

Для первых объемных интегралов в правой части, содержащих дифференциальный оператор  $\nabla$  (дивергенцию) учтем теорему Гаусса-Остроградского (5.1.25), позволяющую их представить в виде поверхностных интегралов по поверхностям  $S^{(i)} + \Sigma^{(i)}$  ( $i = 1, 2$ ), ограничивающих объемы  $V^{(i)}$ :

$$\int_{V^{(i)}} \frac{\partial}{\partial t} (\rho f) dV = \int_{S^{(i)} + \Sigma^{(i)}} (-\rho f v_k + \psi_k) n_k ds + \int_{V^{(i)}} \rho F dV, \quad (5.9.13)$$

что можно переписать в виде:

$$\int_{V^{(1)}} \frac{\partial}{\partial t} (\rho f) dV = \int_{S^{(1)}} (-\rho f v_k + \psi_k) n_k ds + \int_{\Sigma^{(1)}} (-\rho f v_k + \psi_k) n_k ds + \int_{V^{(1)}} \rho F dV, \quad (5.9.14)$$

$$\int_{V^{(2)}} \frac{\partial}{\partial t} (\rho f) dV = \int_{S^{(2)}} (-\rho f v_k + \psi_k) n_k ds + \int_{\Sigma^{(2)}} (-\rho f v_k + \psi_k) n_k ds + \int_{V^{(2)}} \rho F dV.$$

В итоге уравнения (5.9.8), учитывая (5.9.9), (5.9.10) и (5.9.14), можно переписать в виде

$$\frac{d}{dt} \int_{V^{(1)}(t)} \rho f dV = \quad (5.9.15)$$

$$\int_{S^{(1)}} (-\rho f v_k + \psi_k) n_k ds + \int_{\Sigma^{(1)}} (-\rho f (v_k - N_k^{(1)} + \psi_k) n_k^{(1)} ds + \int_{V^{(1)}} \rho F dV,$$

$$\frac{d}{dt} \int_{V^{(2)}(t)} \rho f dV =$$

$$\int_{S^{(2)}} (-\rho f v_k + \psi_k) n_k ds + \int_{\Sigma^{(2)}} (-\rho f (v_k - N_k^{(2)} + \psi_k) n_k^{(2)} ds + \int_{V^{(2)}} \rho F dV.$$

Вычитая (5.9.15) из (5.9.4), получим интегральное уравнение, содержащее интегралы только по поверхности разрыва  $\Sigma$ , через которую происходит взаимодействие между средами в объемах  $V^{(1)}$  и  $V^{(2)}$ , являющееся внутренним взаимодействием для среды в объеме  $V$ :

$$\int_{\Sigma^{(1)}} (-\rho f(v_k - N^{(1)}) + \psi_k) n_k^{(1)} ds + \int_{\Sigma^{(2)}} (-\rho f(v_k - N^{(2)}) + \psi_k) n_k^{(2)} ds = 0. \quad (5.9.16)$$

**Собственная система координат на поверхности разрыва.** Наряду с декартовой системой координат наблюдателя  $x_1 x_2 x_3 t$ , обозначаемой буквой  $K$ , в которой определены поле скорости  $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$  и в каждой точке на поверхности разрыва нормальная скорость перемещения  $N\mathbf{n}$ , введем в каждой точке поверхности разрыва "собственную" декартову систему координат  $x'_1 x'_2 x'_3 t'$ , обозначаемую буквой  $K'$  и перемещающуюся поступательно в исследуемый малый период времени от  $t$  до  $t + dt$  со скоростью  $N\mathbf{n}$ , так что имеет место следующее правило преобразования для координат  $x_k$  и  $x'_k$ , а также скоростей  $\mathbf{v}$  и  $\mathbf{v}'$  в указанных системах координат:

$$x_k = x'_k + N n_k (t - \hat{t}), \quad v_k = v'_k + N n_k. \quad (5.9.17)$$

Тогда уравнение (5.9.16) может быть переписано через интеграл по  $\Sigma$ , учитывая (5.9.17) и (5.9.18)

$$\int_{\Sigma} \{(-\rho^{(1)} f^{(1)} v_k^{(1)} + \psi_k^{(1)}) - (-\rho^{(2)} f^{(2)} v_k^{(2)} + \psi_k^{(2)})\} n_k ds = 0. \quad (5.9.18)$$

Этот интеграл должен равняться нулю для любой произвольной части поверхности разрыва  $\Sigma$ . Все функции входящие в полученный интеграл, непрерывны вдоль поверхности интегрирования  $\Sigma$ . Учитывая эти два обстоятельства, аналогично теореме (5.1.27) о нулевой подынтегральной функции для интеграла по объему нетрудно доказать теорему о нулевой подынтегральной функции для интеграла по поверхности. Тогда получим что подынтегральная функция (5.9.18) должна равняться нулю в каждой точке на поверхности  $\Sigma$ :

$$(\rho^{(1)} f^{(1)} v_k^{(1)} + \psi_k^{(1)}) n_k = (\rho^{(2)} f^{(2)} v_k^{(2)} - \psi_k^{(2)}) n_k \quad (5.9.19)$$

$$(\mathbf{v}'^{(1)} = \mathbf{v}^{(1)} - N^{(1)} \mathbf{n}^{(1)} = \mathbf{v}^{(1)} - N \mathbf{n}, \quad \mathbf{v}'^{(2)} = \mathbf{v}^{(2)} - N^{(2)} \mathbf{n}^{(2)} = \mathbf{v}^{(2)} - N \mathbf{n}).$$

В итоге имеем следующую теорему.

**Теорема.** Для обыкновенных поверхностей разрыва из интегральных уравнений (5.8.1)-(5.8.4) сохранения массы, импульса, момента импульса и энергии следуют алгебраические уравнения сохранения на в каждой точке поверхности разрыва, накладывающие ограничения на

значения функций  $\rho$ ,  $\mathbf{v}'$ ,  $\mathbf{m}$ ,  $\sigma_{kl}$ ,  $\mathbf{q}$ ,  $\boldsymbol{\theta}_k$  в одной точке, но по разные стороны от разрыва, и которые в обобщенных параметрах (5.8.17) имеют вид

$$(\rho^{(2)} f^{(2)} v_k'^{(2)} - \rho^{(1)} f^{(1)} v_k'^{(1)}) n_k = (\psi_k^{(2)} - \psi_k^{(1)}) n_k, \quad (5.9.20)$$

$f$	1	$\mathbf{v}'$	$[\mathbf{x} \times \mathbf{v}'] + \mathbf{m}$	$u + \frac{1}{2}(\mathbf{v}')^2$
$\psi_k$	0	$\boldsymbol{\sigma}_k$	$[\mathbf{x} \times \boldsymbol{\sigma}_k] + \boldsymbol{\theta}_k$	$(\boldsymbol{\sigma}_k \cdot \mathbf{v}') - q_k$

где  $\mathbf{v}' = \mathbf{v} - N\mathbf{n}$  – скорость среды в системе координат, движущейся с нормальной скоростью перемещения поверхности разрыва в рассматриваемой точке.

Аналогичное уравнение для баланса энтропии ( $f = s$ ,  $\psi_k = -q_k/T$ ) и отрицательного производства энтропии на поверхности разрыва  $\{\rho\Phi\}_\Sigma$  (см. (5.7.6), (5.7.5)) имеет вид

$$(\rho^{(2)} v_k^{(2)} s^{(2)} + q_k^{(2)}/T^{(1)} - \rho^{(1)} v_k^{(1)} s^{(1)} + q_k^{(1)}/T^{(2)}) n_k^{(1)} + \{\rho\Phi\}_\Sigma = 0 \quad (5.9.21)$$

$$\{\rho\Phi\}_\Sigma \geq 0.$$

Выпишем теперь по отдельности уравнение сохранения массы ( $f \equiv 1$ ,  $\psi_k \equiv 0$ ), импульса ( $f \equiv \mathbf{v}'$ ,  $\psi_k \equiv \boldsymbol{\sigma}_k$ ), момента импульса ( $f \equiv [\mathbf{x} \times \mathbf{v}'] + \mathbf{m}$ ,  $\psi_k \equiv [\mathbf{x} \times \boldsymbol{\sigma}_k] + \mathbf{M}$ ), энергии ( $f = u + \frac{1}{2}(\mathbf{v}')^2$ ,  $\psi_k = \boldsymbol{\sigma}_k \cdot \mathbf{v}' - q_k$ ) на классической поверхности разрыва, следующие из (5.9.20):

$$\rho^{(2)} v_k^{(2)} n_k^{(1)} = \rho^{(1)} v_k^{(1)} n_k^{(1)} \equiv \rho v_n', \quad (5.9.22)$$

$$\rho v_n (\mathbf{v}'^{(2)} - \mathbf{v}'^{(1)}) = (\boldsymbol{\sigma}_k^{(2)} - \boldsymbol{\sigma}_k^{(1)}) n_k^{(1)} \equiv \boldsymbol{\sigma}_n^{(2)} - \boldsymbol{\sigma}_n^{(1)}, \quad (5.9.23)$$

$$\begin{aligned} \rho v_n (u^{(2)} + \frac{1}{2}(\mathbf{v}'^{(2)})^2 - u^{(1)} - \frac{1}{2}(\mathbf{v}'^{(1)})^2) &= \boldsymbol{\sigma}_n^{(2)} \mathbf{v}'^{(2)} - \boldsymbol{\sigma}_n^{(1)} \mathbf{v}'^{(1)} - (q_n^{(2)} - q_n^{(1)}) \equiv \\ &\equiv (\boldsymbol{\sigma}_k^{(2)} \mathbf{v}'^{(2)} - \boldsymbol{\sigma}_k^{(1)} \mathbf{v}'^{(1)} - q_k^{(2)} + q_k^{(1)}) n_k^{(1)}, \end{aligned} \quad (5.9.24)$$

$$\begin{aligned} \rho v_n ([\mathbf{x} \times \mathbf{v}'^{(2)}] + \mathbf{m}^{(2)} - [\mathbf{x} \times \mathbf{v}'^{(1)}] - \mathbf{m}^{(1)}) &= ([\mathbf{x} \times \boldsymbol{\sigma}_n^{(2)}] + \boldsymbol{\theta}_n^{(2)} - [\mathbf{x} \times \boldsymbol{\sigma}_n^{(1)}] - \boldsymbol{\theta}_n^{(1)}) \equiv \\ &\equiv ([\mathbf{x} \times \boldsymbol{\sigma}_k^{(2)}] + \boldsymbol{\theta}_k^{(2)} - [\mathbf{x} \times \boldsymbol{\sigma}_k^{(1)}] - \boldsymbol{\theta}_k^{(1)}) n_k^{(1)}, \end{aligned} \quad (5.9.25)$$

$$\rho v_n (s^{(2)} - s^{(1)}) = \left( \frac{q_k^{(2)}}{T^{(2)}} - \frac{q_k^{(1)}}{T^{(1)}} \right) n_k^{(1)} + \{\rho\Phi\}_\Sigma \equiv \frac{q_k^{(2)}}{T^{(2)}} - \frac{q_k^{(1)}}{T^{(1)}} + \{\rho\Phi\}_\Sigma. \quad (5.9.26)$$

Здесь учтено, что  $\mathbf{x}^{(2)} = \mathbf{x}^{(1)} = \mathbf{x}$ , все величины рассматриваются в одной точке на поверхности разрыва, но только с разных сторон поверхности разрыва; введены нормальные составляющие (проекции на  $\mathbf{n}^{(1)} \equiv \mathbf{n}^{(p)}$ ) для скоростей  $v_n^{(\alpha)}$ , напряжений  $\boldsymbol{\sigma}_n^{(\alpha)}$ , тепловых потоков  $q_n^{(\alpha)}$  и моментных напряжений  $\boldsymbol{\theta}_n^{(\alpha)}$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{v}'_n^{(\alpha)} &= \mathbf{v}'^{(\alpha)} \mathbf{n}^{(1)}, \quad \boldsymbol{\sigma}_n^{(\alpha)} = \boldsymbol{\sigma}_k^{(\alpha)} n_k^{(1)}, \quad q_n^{(\alpha)} = q_k^{(\alpha)} n_k^{(1)}, \\ \boldsymbol{\theta}_n^{(\alpha)} &= \boldsymbol{\theta}_k^{(\alpha)} n_k^{(1)} \quad (\alpha = 1, 2). \end{aligned} \quad (5.9.27)$$

В теории скачков используется следующий оператор, характеризующий амплитуду скачка

$$[\varphi] \equiv \varphi^{(2)} - \varphi^{(1)}, \quad (5.9.28)$$

в частности,

$$\begin{aligned} [\mathbf{v}'] &\equiv \mathbf{v}'^{(2)} - \mathbf{v}'^{(1)}, \quad [\boldsymbol{\sigma}_n] \equiv \boldsymbol{\sigma}_n^{(2)} - \boldsymbol{\sigma}_n^{(1)}, \\ [\boldsymbol{\sigma}_n \mathbf{v}' - q_n] &\equiv \boldsymbol{\sigma}_n^{(2)} \mathbf{v}'^{(2)} - \boldsymbol{\sigma}_n^{(1)} \mathbf{v}'^{(1)} - (q_n^{(2)} - q_n^{(1)}), \\ \left[ u + \frac{1}{2} (v')^2 \right] &\equiv u^{(2)} + \frac{1}{2} (v'^{(2)})^2 - u^{(1)} - \frac{1}{2} (v'^{(1)})^2, \\ [\mathbf{m}] &\equiv \mathbf{m}^{(2)} - \mathbf{m}^{(1)}, \quad [\boldsymbol{\theta}_n] \equiv \boldsymbol{\theta}_n^{(2)} - \boldsymbol{\theta}_n^{(1)}. \end{aligned}$$

Здесь квадратные скобки не следует путать с векторным произведением двух векторов  $[\mathbf{a} \times \mathbf{b}]$ . Тогда уравнения (5.9.22) - (5.9.26) можно переписать в более компактном виде:

$$[\rho v'_n] = 0 \quad (\rho v'_n = \rho^{(1)} v'_k^{(1)} n_k^{(1)} = \rho^{(2)} v'_k^{(2)} n_k^{(1)}), \quad (5.9.29)$$

$$\rho v'_n [\mathbf{v}'] = [\boldsymbol{\sigma}_n], \quad (5.9.30)$$

$$\rho v'_n \left[ u + \frac{1}{2} (v')^2 \right] = [\boldsymbol{\sigma}_n \mathbf{v}' - q_n], \quad (5.9.31)$$

$$\rho v'_n [\mathbf{m}] = [\boldsymbol{\theta}_n], \quad (5.9.32)$$

$$\rho v'_n [s] = [q_n / T] + \{\rho \Phi\}_\Sigma, \quad \{\rho \Phi\}_\Sigma \geq 0. \quad (5.9.33)$$

Здесь уравнение сохранения момента импульса (5.10.15) получено из (5.10.7) вычитанием уравнения

$$\rho v'_n [\mathbf{x} \times (\mathbf{v}'^{(2)} - \mathbf{v}'^{(1)})] = [\mathbf{x} \times (\boldsymbol{\sigma}_n^{(2)} - \boldsymbol{\sigma}_n^{(1)})],$$

получающегося из уравнения сохранения импульса (5.10.6) после векторного умножения на радиус-вектор  $\mathbf{x}$ .

Уравнение сохранения внутреннего момента импульса рассматриваться не будет, т.к. в подавляющем большинстве случаев внутренний момент количества движения не проявляется, и можно считать, что  $\mathbf{m} = 0$ ,  $\boldsymbol{\theta}_n = 0$ .

Уравнения (5.10.12)-(5.10.16) можно представить через скорости в сис-

теме координат наблюдателя, учитывая, что в соответствии с (5.9.1) или (5.9.6) в любой точке, лежащей на поверхности разрыва, имеет место

$$\mathbf{v}'^{(\alpha)} = \mathbf{v}^{(\alpha)} - \mathbf{N}, \quad v_n'^{(\alpha)} = v_n^{(\alpha)} - N \quad (\alpha = 1, 2).$$

Тогда уравнения (5.10.12)-(5.10.16) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \rho^{(1)} (v_n^{(1)} - N) &= \rho^{(2)} (v_n^{(2)} - N) = \rho (v_n - N), \\ \rho (v_n - N) [\mathbf{v}] &= [\boldsymbol{\sigma}_n], \quad \rho (v_n - N) [u + \frac{1}{2}(\mathbf{v})^2] = [\boldsymbol{\sigma}_n \mathbf{v} - q_n], \quad (5.9.34) \\ \rho (v_n - N) [s] &= [q_n / T] + \{\rho \Phi\}_\Sigma \geq 0. \end{aligned}$$

Здесь третье уравнение (уравнение сохранения энергии) получено из уравнения, следующего из (5.10.14)

$$\rho (v_n - N) [u + \frac{1}{2}(\mathbf{v} - \mathbf{N})^2] = [\boldsymbol{\sigma}_n (\mathbf{v} - \mathbf{N})],$$

которое с учетом (5.10.11) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \rho(v_n - N)(u^{(2)} - u^{(1)} + \frac{1}{2}(\mathbf{v}^{(2)} - \mathbf{N})^2 - \frac{1}{2}(\mathbf{v}^{(1)} - \mathbf{N})^2) &= \\ &= (\boldsymbol{\sigma}_n^{(2)} (\mathbf{v}^{(2)} - \mathbf{N}) - \boldsymbol{\sigma}_n^{(1)} (\mathbf{v}^{(1)} - \mathbf{N})). \end{aligned}$$

После несложных преобразований имеем

$$\begin{aligned} \rho(v_n - N)(u^{(2)} - u^{(1)} + \frac{1}{2}(\mathbf{v}^{(2)})^2 - \frac{1}{2}(\mathbf{v}^{(1)})^2 - \mathbf{N} (\mathbf{v}^{(2)} - \mathbf{v}^{(1)})) &= \\ &= \boldsymbol{\sigma}_n^{(2)} \mathbf{v}^{(2)} - \boldsymbol{\sigma}_n^{(1)} \mathbf{v}^{(1)} - \mathbf{N} (\boldsymbol{\sigma}_n^{(2)} - \boldsymbol{\sigma}_n^{(1)}). \end{aligned}$$

Учитывая, что в соответствии с уравнением импульса второе уравнение (5.10.17)

$$\rho (v_n - N)(\mathbf{v}^{(2)} - \mathbf{v}^{(1)}) = (\boldsymbol{\sigma}_n^{(2)} - \boldsymbol{\sigma}_n^{(1)}), \quad (5.10.18)$$

и учитывая определение оператора [ ], согласно (5.10.11), получим уравнение энергии в виде третьего уравнения (5.10.17).

**Лабораторная система координат.** Помимо произвольной системы координат наблюдателя  $K$  и собственной системы координат  $K'$ , где  $N = 0$ , используется так называемая лабораторная система координат  $K''$ , в которой среда перед поверхностью разрыва (куда направлена нормаль  $\mathbf{n}$ ) покоится, и в которой все скорости отмечаются звездочкой \* сверху:

$$v^{*(1)} = 0, \quad v_n^{*(1)} = 0, \quad N > 0 \quad (v_n'^{(\alpha)} = v_n^{*(\alpha)} - N^* < 0, \alpha = 1, 2). \quad (5.10.19)$$

В этой лабораторной системе координат уравнения сохранения

(5.10.17) на поверхности разрыва имеют вид

$$\begin{aligned}\rho^{(1)} N^* &= \rho^{(2)} (N^* - v_n^*), \quad \rho^{(1)} N^* \mathbf{v}^* = \boldsymbol{\sigma}_n^{(2)} - \boldsymbol{\sigma}_n^{(1)} \quad (\mathbf{v}^* \equiv \mathbf{v}^{*(2)} \equiv [\mathbf{v}]), \\ \rho^{(1)} N^* (u^{(2)} - u^{(1)} + \frac{1}{2}(v^*)^2) &= \boldsymbol{\sigma}_n^{(2)} \cdot \mathbf{v}^* - q_n^{(2)} + q_n^{(1)}, \quad (5.10.20) \\ \rho^{(1)} N^* [s] &= [q_n / T] + \{\rho \Phi\}_\Sigma, \quad \{\rho \Phi\}_\Sigma \geq 0.\end{aligned}$$

**Контактная поверхность разрыва (контактный разрыв).** Среди множества возможных поверхностей разрыва выделяют так называемые контактные поверхности разрыва, через которые нет перетекания среды, чему соответствуют следующие уравнения для скоростей в разных системах координат ( $K'$ ,  $K$ ,  $K^*$ )

$$v_n^{(1)} = v_n^{(2)} = 0, \quad v_n^{(1)} = v_n^{(2)} = v N, \quad v_n^{*(1)} = v_n^{*(2)} = v N = 0. \quad (5.10.21)$$

Контактным разрывам соответствуют границы раздела между разными веществами и фазами, например, граница между жидкостью и газом, между твердым телом и обтекающей жидкостью, между разными жидкостями, между разными твердыми телами.

Для контактных поверхностей разрыва уравнения сохранения (5.10.17) имеют вид

$$\begin{aligned}[\boldsymbol{\sigma}_n] &= 0 \quad (\boldsymbol{\sigma}_n^{(2)} = \boldsymbol{\sigma}_n^{(1)} = \boldsymbol{\sigma}_n), \\ [\boldsymbol{\sigma}_n \cdot \mathbf{v} - q_n] &= 0 \quad (\boldsymbol{\sigma}_n^{(2)} \cdot \mathbf{v}^{(2)} - q_n^{(2)} = \boldsymbol{\sigma}_n^{(1)} \cdot \mathbf{v}^{(1)} - q_n^{(1)}), \quad (5.10.22) \\ [q_n / T] + \{\rho \Phi\}_\Sigma &= 0, \quad \{\rho \Phi\}_\Sigma \geq 0.\end{aligned}$$

Таким образом, на контактных поверхностях разрыва нормальная скорость  $v_n$ , напряжение  $\boldsymbol{\sigma}_n$  и моментное напряжение  $\boldsymbol{\theta}_n$  непрерывны, т.е. не претерпевают разрыв

$$v_n^{(1)} = v_n^{(2)} = v_n = N, \quad \boldsymbol{\sigma}_n^{(1)} = \boldsymbol{\sigma}_n^{(2)} = \boldsymbol{\sigma}_n, \quad \boldsymbol{\theta}_n^{(1)} = \boldsymbol{\theta}_n^{(2)} = \boldsymbol{\theta}_n, \quad (5.10.23)$$

но плотность  $\rho$ , касательная составляющая скорости  $\mathbf{v}_\tau$  ( $\mathbf{v}^{(\alpha)} = v_n^{(\alpha)} \mathbf{n} + \mathbf{v}_\tau^{(\alpha)}$ ,  $\alpha = 1, 2$ ) и тепловой поток  $q_n$  могут претерпевать разрыв. При этом скачки  $[q_n]$  и  $[\mathbf{v}_\tau]$  связаны между собой уравнением, следующим из уравнения энергии (второе уравнение (5.10.22))

$$[q_n] = \boldsymbol{\sigma}_n \cdot [\mathbf{v}_\tau],$$

$$q_n^{(2)} - q_n^{(1)} = \sigma_n (\mathbf{v}_\tau^{(2)} - \mathbf{v}_\tau^{(1)}) = \sigma_{(n\tau)} (\mathbf{v}_\tau^{(2)} - \mathbf{v}_\tau^{(1)}) \quad (5.10.24)$$

$$(\mathbf{v}_\tau^{(\alpha)} = \mathbf{v}^{(\alpha)} - N \mathbf{n}, \quad \sigma_{(\tau n)} = \sigma_n - \sigma_{(n\tau)} \mathbf{n}, \quad \alpha = 1, 2).$$

Видно, что работа сдвигового напряжения  $\sigma_{(n\tau)}$  из-за проскальзывания среды по разные стороны от контактной поверхности, превращается в тепло, что делает эту поверхность источником тепла.

**Поверхность ударного разрыва (ударный скачок).** Теперь рассмотрим неконтактные поверхности разрыва, через которые в отличие от (5.10.21) имеется перетекание массы ( $v_n^{(\alpha)} = 0$ ,  $\alpha = 1, 2$ ). Из уравнения сохранения массы на скачке (5.10.12) следует, что для таких неконтактных поверхностей разрыва нормальные скорости среды  $v_n$  в собственной системе координат по разные стороны от поверхности разрыва (т.е.  $v_n^{(1)}$  и  $v_n^{(2)}$ ) величины одного знака. Направление нормали  $\mathbf{n}$  к поверхности разрыва в рассматриваемой точке (выше эта точка обозначалась через  $p$ ) можно выбрать таким образом, чтобы эти нормальные скорости  $v_n^{(1)}$  и  $v_n^{(2)}$  были отрицательными. Так как нормаль  $\mathbf{n}$  в соответствии с рис. 5.9.1 выбрана таким образом, что она направлена из  $\delta V^{(2)}$  в  $\delta V^{(1)}$ , то при отрицательных  $v_n^{(1)}$  и  $v_n^{(2)}$  среда перетекает через поверхность разрыва из  $\delta V^{(1)}$  в  $\delta V^{(2)}$ . Другими словами при таком выборе индексов (1) и (2) для зон  $\delta V^{(1)}$  и  $\delta V^{(2)}$  по обе стороны от поверхности разрыва, когда  $v_n^{(1)}$  и  $v_n^{(2)}$  отрицательны, можно сказать, что среда со стороны зоны  $\delta V^{(1)}$  является средой, находящейся перед поверхностью разрыва, а среда со стороны  $\delta V^{(2)}$  является средой за поверхностью разрыва, т.е. уже прошедшей через эту поверхность.

**Определение.** Обыкновенная поверхность разрыва, на которой имеется разрыв нормальной скорости среды ( $[v_n] \neq 0$ ), а значит, имеется и разрыв нормальной составляющей напряжения ( $[\sigma_{(nn)}] \neq 0$ ), называется *ударной* или *ударным скачком*. Ударный скачок – это всегда неконтактная поверхность разрыва. Это следует из проекции уравнения импульса (5.10.13) на нормаль  $\mathbf{n}$ :

$$\rho v_n' [v_n'] = [\sigma_{(nn)}] \quad \text{или} \quad \rho(v_n - N) [v_n] = [\sigma_{(nn)}]. \quad (5.10.25)$$

Видно, что из  $[v_n] \neq 0$  следует  $v_n^{(1)} \neq v_n^{(2)}$ . Тогда, учитывая уравнение массы  $\rho^{(1)} v_n^{(1)} = \rho^{(2)} v_n^{(2)}$  и имея в виду, что  $\rho^{(\alpha)} \neq 0$  ( $\alpha = 1, 2$ ), получаем  $v_n^{(\alpha)} \neq 0$ , т.е.  $v_n^{(\alpha)} \neq N$  ( $\alpha = 1, 2$ ). Таким образом, имеем, что  $[\sigma_{nn}] \neq 0$  и через ударный скачок всегда имеется перетекание среды.

Ударные скачки могут быть двух типов: ударные скачки сжатия и разрежения в зависимости от того увеличивается или уменьшается плотность среды после прохождения ударного скачка, а именно:  $\rho^{(2)} > \rho^{(1)}$  соответствует скачку сжатия,  $\rho^{(2)} < \rho^{(1)}$  – скачку разрежения.

**Связь схемы движения с поверхностью разрыва со схемой с непрерывным распределением параметров.** В механике сплошной среды используются несколько схем движения. Первая и наиболее представительная – схема с непрерывными или "гладкими" функциями, заданными в объеме, т.е. во всех точках объема, и описывающими распределения (поля) различных параметров (плотности, скорости, тензоров напряжений, деформаций и т.д.). Эти непрерывные и дифференцируемые функции удовлетворяют дифференциальным уравнениям сохранения массы, импульса, энергии и т.д., а также уравнениям состояния, характеризующим физические свойства рассматриваемого вещества. Объем, где заданы эти функции, называется областью непрерывного движения.

Вторая схема – схема с поверхностью разрыва (слабого и сильного), разделяющего две объемные области с непрерывными функциями, т.е. области непрерывного движения. Значения функций по разные стороны от разрыва вместе с нормальной скоростью перемещения этого разрыва удовлетворяют алгебраическим уравнениям сохранения на скачке.

Отметим также, что в области непрерывного движения возможны отдельные особые точки или особые линии, на которых функции, описывающие распределения параметров, имеют особенности, а именно: равны бесконечности какие-либо из параметров (плотность, скорость, напряжение, деформация и т.д.).

На неконтактных поверхностях разрыва, через которые имеется пере-

ход среды из одной зоны непрерывного движения в другую, градиенты параметров, претерпевающих разрыв, или скорости изменения этих параметров в частице среды формально равны бесконечности. Более детальный анализ процессов в зонах, соответствующих поверхностям разрыва, с учетом молекулярного строения и особенностей молекулярных процессов показывает, что эти зоны имеют не нулевую, а конечную толщину, характерный размер которой  $\delta^{(sh)}$  (индекс (sh) соответствует слову shock – ударный) определяется расстояниями межмолекулярного взаимодействия (см. рис. 5.10.5). В частности в газах толщина ударных скачков по порядку равна нескольким длинам свободного пробега молекул. При этом в этих узких зонах, соответствующих ударным скачкам, проявляются диссипативные процессы и эффекты, которые незаметны в зонах непрерывного движения. Диссипативные эффекты проявляются и в контактных поверхностях разрыва (см. рис. 5.10.6).

Таким образом, для детального исследования структуры зон, соответствующих ударным и другим типам поверхностей разрывов, необходимо использовать более сложные и детальные уравнения механики сплошной среды, чем в зонах непрерывного движения.

Исследование движения различных веществ (газов, жидкостей и твердых тел) показали, что иногда одними дифференциальными уравнениями непрерывного движения не удастся описать все поле движения и приходится вводить поверхности разрыва.

Это приходится делать, когда в уравнениях непрерывного движения не учитываются или учитываются в недостаточной мере диссипативные меха-

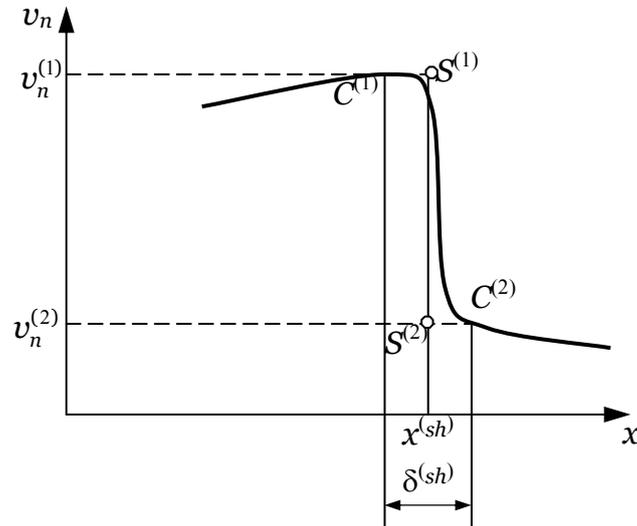


Рис. 5.10.5. Одномерная схема распределения нормальной скорости  $v_n \equiv \mathbf{v} \mathbf{n}$  по координате  $x$  в виде линий  $AS^{(1)}S^{(2)}B$  или  $AC^{(1)}C^{(2)}B$ , когда нормаль  $\mathbf{n}$  направлена вдоль оси  $x$ . Координате  $x = x^{(sh)}$  соответствует разрыв (ударный скачок)  $S^{(1)}S^{(2)}$ , на котором по разные стороны от него нормальные скорости принимают значения  $v_n^{(1)}$  и  $v_n^{(2)}$ . Учет диссипативных процессов приводит к тому, что вместо распределения  $v_n$ , описываемого линией  $AS^{(1)}S^{(2)}B$  с разрывом  $S^{(1)}S^{(2)}$ , получается непрерывное распределение, описываемое линией  $AC^{(1)}C^{(2)}B$  с конечной толщиной  $\delta^{(sh)}$  переходного слоя  $C^{(1)}C^{(2)}$  вместо скачка  $S^{(1)}S^{(2)}$  с нулевой толщиной.

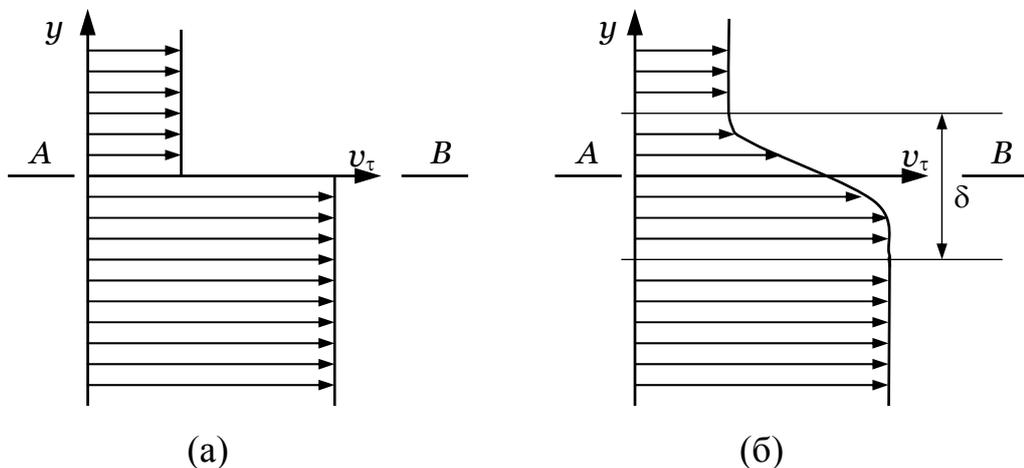


Рис. 5.10.6. Схема распределения скоростей поперек контактного разрыва  $AB$  в системе координат, где этот разрыв покоится в бездиссипативном (без учета вязкости) приближении – (а) и с учетом диссипации (вязкости) – (б), когда контактная поверхности разделяет жидкости или газы, и когда выделяется слой смещения толщиной  $\delta$  с непрерывным распределением скорости в нем ( $\mathbf{v} = \mathbf{v}_\tau, v_n = 0$ ).

низмы, такие как внутреннее трение, вязкость, теплопроводность, всегда проявляющиеся при достаточно больших скоростях деформирования, больших градиентах температур, сильно неравновесных состояниях<sup>1</sup>, хотя часто практически незаметные в областях непрерывного движения с достаточно малыми скоростями деформирования, достаточно малыми градиентами температур и малой неравновесностью.

Учет указанных диссипативных механизмов приводит к тому, что удастся "избавиться" от поверхностей разрыва, в некотором смысле усложняющих алгоритм и логику построения математического описания движения вещества на основе уравнений сохранения, и все поле движения становится непрерывным без поверхностей разрыва. Причем поверхности, соответствовавшей в бездиссипативном приближении поверхности разрыва, при учете диссипации соответствует достаточно тонкая (но ненулевой толщины) зона резкого изменения параметров (см. рис. 5.9.3 и 5.9.4) среды (скорости, напряжения, температур, и т.д.).

### §10. Ударная адиабата для нормального ударного скачка.

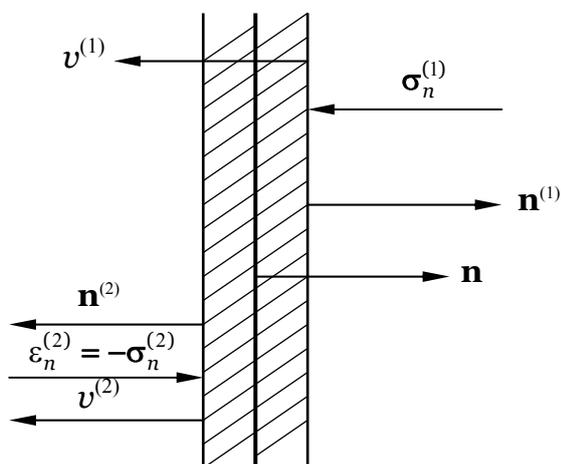


Рис. 5.11.1.

Рассмотрим так называемый нормальный ударный скачок с одномерным движением перед и за скачком, когда (см. рис. 5.10.1)

$$\mathbf{v}_\tau^{(1)} = \mathbf{v}_\tau^{(2)} = 0, \quad \sigma_{(n\tau)}^{(1)} = \sigma_{(n\tau)}^{(2)} = 0,$$

$$\mathbf{v}^{(\alpha)} = v^{(\alpha)} \mathbf{n}, \quad \sigma_n^{(\alpha)} = \sigma^{(\alpha)} \mathbf{n}. \quad (5.11.1)$$

Тогда в лабораторной системе координат (5.10.19) уравнения массы, импульса и энергии (5.10.20) можно записать в виде

$$\rho^{(2)} = \rho^{(1)} \frac{N^*}{N^* - v^{*(2)}},$$

<sup>1</sup> Понятие равновесного и неравновесного состояний дано в гл. 6.

$$\sigma_n^{(2)} = \sigma_n^{(1)} + \rho^{(1)} N^* v^{*(2)}, \quad (5.11.2)$$

$$u^{(2)} = u^{(1)} + \frac{(v^*)^2}{2} + \frac{\sigma^{(1)} v^*}{\rho^{(1)} N^*}.$$

Здесь полагалось  $q_n^{(2)} = q_n^{(1)} = 0$ , ибо на ударных разрывах всегда можно пренебречь тепловыми потоками перед и за скачком. В связи с этими соотношениями (5.11.2) называются уравнениями ударной адиабаты.

**Расчет напряжения и плотности по измерениям скорости ударной волны и скорости удара.** Из (5.11.2) видно, что, зная состояние перед ударным скачком ( $\rho^{(1)}, u^{(1)}$ ) и измеряя только кинематические параметры: скорость ударного скачка  $N^*$  и скорость среды за скачком  $v^*$  в лабораторной системе координат (т.е. относительно среды перед скачком), легко определяются параметры среды за скачком: плотность среды  $\rho^{(2)}$ , нормальное напряжение  $\sigma^{(2)}$  и внутренняя энергия  $u^{(2)}$ . Это очень важное следствие, т.к. непосредственное измерение механического напряжения  $\sigma$  и внутренней энергии  $u$  (последнее связано с измерением температуры  $T$ ) за ударной волной при быстропротекающих процессах во много раз сложнее, чем измерение скоростей.

Проиллюстрируем это на следующем примере так называемого "метода торможения" для экспериментального определения ударных адиабат твердых веществ при высокоскоростном нагружении. В этом методе плоский образец (ударник) из исследуемого материала разгоняется с помощью взрывчатого вещества до некоторой скорости  $u_0$ , после чего он ударяется о неподвижную мишень (момент удара будем считать соответствующим моменту времени  $t = 0$ ) из того же материала (см. рис. 5.10.2а).

После плоского удара от поверхности контакта в разные стороны по мишени и ударнику пойдут две нормальных ударных волны. Этот процесс удобней рассмотреть в системе координат  $(\dot{x}, t)$ , движущейся со скоростью  $\frac{1}{2} u_0$  относительно мишени. В этой системе координат мишень и ударник из

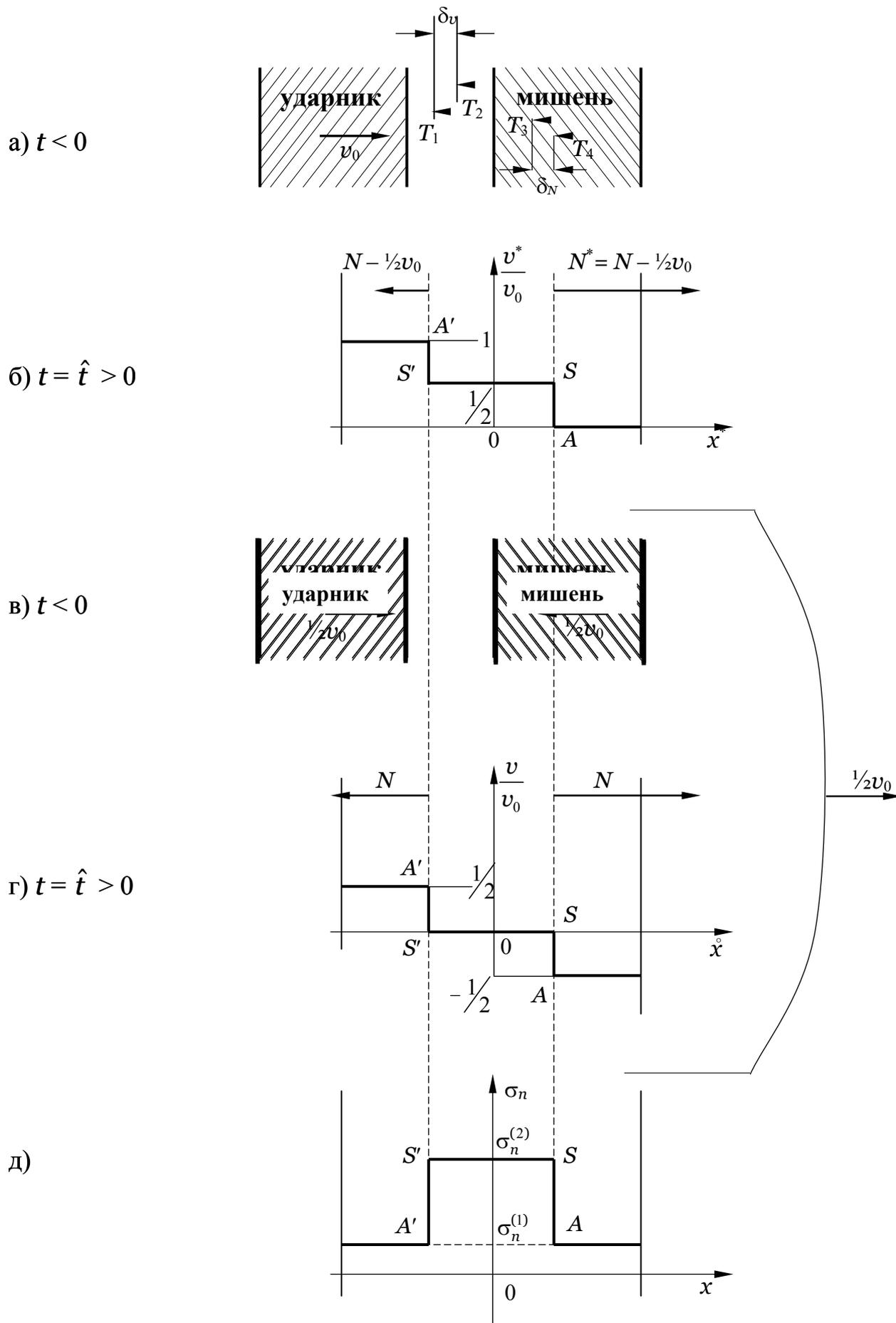


Рис. 5.11.2

одного и того же материала движутся навстречу со скоростью  $\frac{1}{2}v_0$  (рис. 5.10.2в), т.е. процесс является симметричным относительно поверхности контакта, которая в связи с этим является неподвижной ( $v = 0$ ; рис. 5.10.2г), а скачки скоростей  $[v]$  на обеих ударных волнах и скорости обеих ударных волн  $N$  одинаковы (см. штриховые линии). Отсюда получаем эпюру скоростей в мишени и ударнике (рис. 5.10.2г), откуда следует, что скачок скорости на ударной волне и в мишени ( $A'S'$ ), и в ударнике ( $AS$ ) равен:

$$[v] = \frac{1}{2}v_0.$$

На рис. 5.11.2б эта же эпюра показана для скоростей в лабораторной системе координат, где  $v^* = v + \frac{1}{2}v_0$ , и где мишень покоится, и для соотношений (5.10.26) имеем

$$v^{*(2)} = [v] + \frac{1}{2}v_0.$$

На рис. 5.11.2д показана эпюра нормальных напряжений  $\sigma_n$  после соударения, когда между ударными волнами  $AS$  в мишени и  $A'S'$  в ударнике находится сжатая постоянным напряжением  $\sigma^{(2)}$  "пробка", которая покоится ( $v = 0$ ,  $dv / dt = 0$ ,  $\partial\sigma_n / \partial x = 0$ ) в подвижной инерциальной системе координат.

Таким образом, для определения значений плотности  $\rho^{(2)}$ , напряжения  $\sigma^{(2)}$  и внутренней энергии  $u^{(2)}$  помимо значения этих параметров в исходном состоянии ( $\rho^{(1)}$ ,  $\sigma^{(1)}$ ,  $u^{(1)}$ ), которые легко определяются перед экспериментом (при этом при ударных нагружениях напряжением  $\sigma^{(1)} \approx 0,1$  МПа обычно можно пренебречь по сравнению с  $\sigma^{(2)} \sim 10$  МПа), необходимо измерить скорость ударника  $v_0$ , определяющую  $v^{*(2)}$ , и скорость ударной волны в мишени  $N^*$ . А эти две скорости определяются по измерению периода времени  $\tau_v$  – времени прохождения лицевой поверхности ударника базового расстояния  $\delta_v$  между двумя электроконтактными датчиками перед мишенью и измерению периода времени  $\tau_N$  – времени прохождения ударной волны базового расстояния  $\delta_N$  между двумя датчиками в теле мишени. Электроконтактный датчик выдает сигнал на осциллограф при его замыкании из-за касания его

ударником или ударной волной. Время между касаниями ударником датчиков  $T_1$  и  $T_2$  (см. рис. 5.10.2б) дает  $\tau_v$ , а время между касаниями датчиков  $T_3$  и  $T_4$  в теле мишени дает время  $\tau_N$ . В тоге получим

$$v_0 = 2 v^{*(2)} = \frac{\delta_v}{\tau_v}, \quad N^* = \frac{\delta_N}{\tau_N}.$$

Обычно

$$\delta_v \sim \delta = 5 - 8 \text{ мм}, \quad v_0 \sim N^* \sim 10 \text{ м/с}, \quad \tau_v \sim \tau_N \sim 10 \equiv 1 \text{ мкс}.$$

Таким образом, для измерения скоростей порядка 1 км/с нужно уметь измерять времена порядка 1 мкс.

В итоге для каждого материала можно построить ударную адиабату в

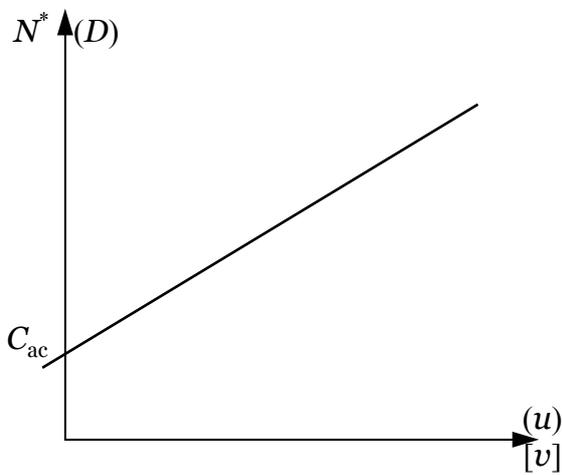


Рис. 5.11.3.

виде  $N^*([v])$  (см. рис. 5.11.3), показывающую скорость нормальной ударной волны в рассматриваемом веществе в зависимости от скачка скорости на ней. В физике ударных волн, где скорость нормальной ударной волны  $N^*$  обозначают буквой  $D$ , а скачок скорости  $v^{*(2)} \equiv [v]$  – буквой  $u$ , ударная адиабата  $N^*(v^{*(2)})$  называется  $Du$ -диаграммой.

Для конденсированных веществ эта экспериментальная кривая близка к прямой линии, а появление точек излома обычно свидетельствует о происходящих в ударной волне физико-химических превращениях.

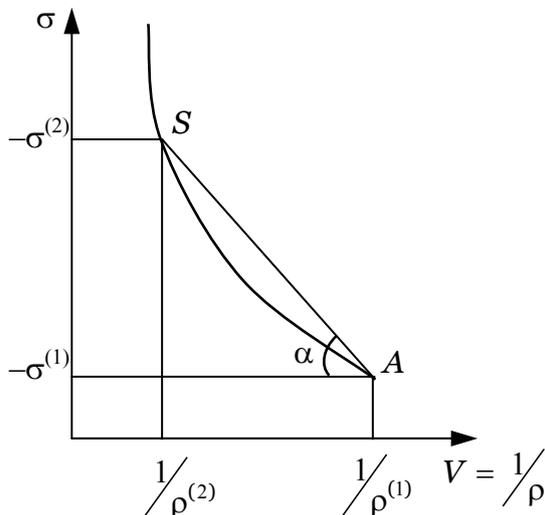


Рис. 5.11.4.

Значение  $N^* = C_{ac}$  соответствующее нулевой интенсивности ударной волны ( $[v] \equiv v^{*(2)} \rightarrow 0$ ) дает скорость распространения слабых разрывов, которые называются акустическими или звуковыми.

Как уже показано, измеренные значения  $N^*$  и  $[v] \equiv v^{*(2)}$  позволяют рас-

считать напряжения  $\sigma^{(2)}$  и плотность  $\rho^{(2)}$  за ударной волной и представить уравнение ударной адиабаты в координатах напряжения  $\sigma^{(2)}$  и удельный объем  $V^{(2)} \equiv 1/\rho^{(2)}$ , характерный вид которой для ударных волн сжатия ( $\rho^{(2)} > \rho^{(1)}$ ,  $\sigma^{(2)} < 0$ ) показан на рис. 5.11.4.

Из первых двух уравнений (5.10.26) нетрудно выразить  $N^*$  через  $\sigma^{(2)}$  и  $V^{(2)} \equiv 1/\rho^{(2)}$ :

$$N^* = \sqrt{\frac{\sigma^{(2)} - \sigma^{(1)}}{V^{(2)} - V^{(1)}}}, \quad V^{(1)} = \frac{1}{\rho^{(1)}}, \quad V^{(2)} = \frac{1}{\rho^{(2)}}.$$

Видно, что скорость ударной волны  $N^*$  пропорциональна  $\sqrt{\alpha}$ , где  $\alpha$  – угол наклона секущей, соединяющей на ударной адиабате точки, соответствующие состояниям перед  $(V^{(1)}, \sigma^{(1)})$  и за  $(V^{(2)}, \sigma^{(2)})$  ударной волной.

Описанным методом измерения только кинематических величин российский ученый Л.В. Альтшулер с сотрудниками и американские ученые Уолш, Христиан и др. в 50-е годы впервые определили ударные адиабаты сжатия твердых веществ до давлений порядка  $10^5$  МПа. Эти исследования велись в те годы в связи с созданием и совершенствованием ядерного оружия. Позднее эти исследования расширились во многих направлениях не только в военных целях, но и для развития ударно-волновых и взрывных технологий. К настоящему времени, помимо электроконтактных датчиков были разработаны электромагнитные датчики, позволяющие регистрировать эволюцию массовой скорости за ударной волной, манганиновые датчики, позволяющие регистрировать эволюцию давления за ударной волной, рентгеновская высокоскоростная регистрация летящих тел с большими скоростями и т.д.

## **§ 12. Поверхности разрыва с сосредоточенной поверхностной массой, импульсом, энергией и поверхностным натяжением**

Применительно к плотности отличное от нуля и положительное предельное значение интеграла (5.8.10), приводит к тому, что рассматриваемая *поверхность разрыва*, имеющая нулевой объем, обладает конечной массой:

$$\lim_{\substack{\delta\Sigma \rightarrow 0 \\ \delta h \rightarrow 0}} \frac{1}{\delta\Sigma} \int_{\delta V} \rho \, dV = \lim_{\substack{\delta\Sigma \rightarrow 0 \\ \delta h \rightarrow 0 \\ (\delta V \rightarrow 0)}} \frac{\delta m}{\delta V} 2 \cdot \delta h = \lim_{\delta h \rightarrow 0} \rho (2 \cdot \delta h) \equiv \{\rho\}_\Sigma, \quad (5.12.1)$$

где  $\{\rho\}_\Sigma$  будем называть поверхностной плотностью массы, размерность которой кг/м<sup>2</sup>.

Аналогично можно ввести поверхностную плотность импульса, момента импульса, энергии и энтропии, используя для них обозначение  $\{ \}_\Sigma$ :

$$\lim_{\substack{\delta\Sigma \rightarrow 0 \\ \delta h \rightarrow 0}} \frac{1}{\delta\Sigma} \int_{\delta V} \rho \, \mathbf{v} \, dV = \{\rho \, \mathbf{v}\}_\Sigma,$$

$$\lim_{\substack{\delta\Sigma \rightarrow 0 \\ \delta h \rightarrow 0}} \frac{1}{\delta\Sigma} \int_{\delta V} \rho ([\mathbf{x} \times \mathbf{v}] + \mathbf{m}) \, dV = \{\rho([\mathbf{x} \times \mathbf{v}] + \mathbf{m})\}_\Sigma,$$

$$\lim_{\substack{\delta\Sigma \rightarrow 0 \\ \delta h \rightarrow 0}} \frac{1}{\delta\Sigma} \int_{\delta V} \rho \left(u + \frac{v^2}{2}\right) \, dV = \left\{\rho\left(u + \frac{v^2}{2}\right)\right\}_\Sigma,$$

$$\lim_{\substack{\delta\Sigma \rightarrow 0 \\ \delta h \rightarrow 0}} \frac{1}{\delta\Sigma} \int_{\delta V} \rho \, s \, dV = \{\rho \, s\}_\Sigma.$$

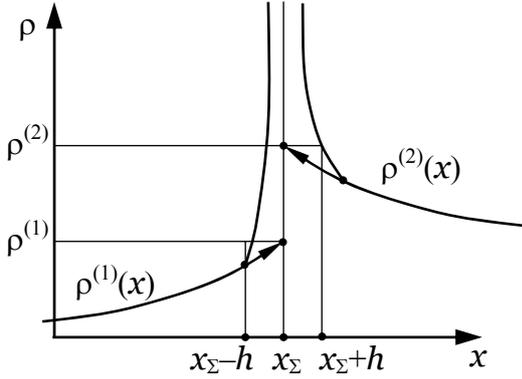


Рис. 5.12.1.

На рис. 5.12.1 показан пример возможного реального одномерного распределения массы, соответствующей модели или схеме с конечной поверхностной плотностью. Пусть имеется узкая зона, толщина которой  $2h$  во много раз меньше характерных линейных размеров  $L$  исследуемого тела и процесса, так что этой толщиной можно пренебречь, но в то же время в этой узкой зоне находится значительная масса  $dm_\Sigma$ , которая равна

$$dm_\Sigma = \int_{x_\Sigma - h}^{x_\Sigma + h} \rho \, dx = \{\rho\}_\Sigma. \quad (5.12.3)$$

Тогда имеет смысл использовать идеализированную схему с поверхностью разрыва (которую называют поверхностью типа пелены) нулевой толщины и с координатой  $x = x_\Sigma$ , около которой распределение объемной плотности показано кривыми  $\rho^{(1)}(x)$  и  $\rho^{(2)}(x)$ , а масса указанной узкой зоны сосредоточена на поверхности разрыва, так что при  $x = x_\Sigma$  в распределении  $\rho(x)$

имеется особенности типа  $\delta$ -функции

$$\rho(x) = \{\rho\}_\Sigma \cdot \delta(x - x_\Sigma) + H(x_\Sigma - x) \rho^{(1)}(x) + H(x - x_\Sigma) \rho^{(2)}(x), \quad (5.12.4)$$

$$(H(\xi) = \begin{cases} 1, & \xi > 0; \\ 0, & \xi < 0, \end{cases} \quad \delta(\xi) = 0 \text{ при } \xi > 0, \xi < 0; \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\xi) d\xi = 1).$$

где ступенчатая функция  $H(\xi)$  называется функцией Хевисайда. Идеализированная схема адекватно отражает распределение массы вне узкой зоны толщиной  $2h$  и дает правильное значение массы в узкой зоне, но сосредотачивает ее всю на поверхности разрыва нулевой толщины.

Поверхность разрыва типа пелены обладает массой, характеризуемой конечной поверхностной плотностью массы, и она используется для описания процессов в "газе без собственного давления", каковым может быть дисперсная фаза из твердых мелких частиц, взвешенных в газе.

Обладая массой, а точнее массовой поверхностной плотностью массы, поверхность разрыва типа пелены обладает и импульсом, моментом импульса, энергией, энтропией и другими параметрами, определяемыми поверхностными плотностями импульса  $\{\rho \mathbf{v}\}_\Sigma$ , момента импульса  $\{\rho([\mathbf{x} \times \mathbf{v}] + \mathbf{m})\}_\Sigma$ , энергии  $\{\rho(u + \frac{1}{2}v^2)\}_\Sigma$ , энтропии  $\{\rho s\}_\Sigma$  и т.д. (см. (5.9.10)).