## § 5. Интегральное и дифференциальное уравнения сохранения полной энергии

Энергию единицы массы сплошной среды представляют в виде кинетической $\frac{1}{2}\upsilon^2$ и внутренней $u$ энергий (kinetic and internal energy)

$$E = u + \frac{\upsilon^2}{2}, \tag{5.5.1}$$

где $u$ – удельная (отнесенная к единице массы) внутренняя энергия среды, являющаяся скаляром.

Полная энергия среды внутри фиксированного в пространстве эйлерова объема $V_E$ и скорость ее изменения в соответствии с представительностью поля $E(x, t)$ равны

$$\varepsilon = \int\limits_{V_E} \rho\,(u + \frac{\upsilon^2}{2})\,\mathrm{d}V, \tag{5.5.2}$$

$$\frac{\mathrm{d}\varepsilon}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int\limits_{V_E} \rho\,\,(u + \frac{\upsilon^2}{2})\,\mathrm{d}V = \int\limits_{V_E} \frac{\partial}{\partial t}\,\,(\rho(u + \frac{\upsilon^2}{2}))\,\mathrm{d}V.$$

Энергия среды внутри объема $V_E$ может меняться, во-первых, за счет притока и оттока энергии вместе с приходящей и уходящей массой через границу объема $S_E$, что называется конвективным переносом энергии. Интенсивность этого притока (оттока) энергии в единицу времени

$$-\int\limits_{S_E} j_n\,E\,\mathrm{d}s \qquad (j_n = \rho\,\upsilon_n = \rho\,\upsilon_k\,n_k). \tag{5.5.3}$$

Во-вторых, энергия среды внутри объема может меняться за счет работы внешних сил, а именно: работы внешних поверхностных сил вдоль граничной поверхности $S_E$, мощность которых определяется скалярным произведением силы $\boldsymbol{\sigma}_n\,\mathrm{d}s$ на скорость перемещения $\mathbf{v}$:

$$\int\limits_{S_E} \boldsymbol{\sigma}_n \cdot \mathbf{v}\,\mathrm{d}s, \tag{5.5.4}$$

и работы внешних массовых сил $\mathbf{F}$ внутри $V_E$, в том числе гравитационных, электромагнитных сил и сил инерции из-за неинерциальности выбранной системы координат (см. (5.3.3)), мощность которых определяется скалярным произведением силы $\rho\mathbf{F}$ на скорость $\mathbf{v}$:

$$\int_{V_E} \rho\,\mathbf{F}\cdot\mathbf{v}\,\mathrm{d}V \qquad (\mathbf{F} = \mathbf{g} + \mathbf{R} + \mathbf{F}^{\mathrm{in}\prime}). \tag{5.5.5}$$

В-третьих, энергия среды внутри объема $V_E$ может меняться за счет притока тепла извне (external heat flux) через границу $S_E$. Этот приток энергии в отличие от конвективного переноса и работы внешних сил не связан с перемещением среды. Интенсивность притока (оттока) тепла через $S_E$ будем определять с помощью интеграла

$$-\int_{S_E} q_n\,\mathrm{d}s. \tag{5.5.6}$$

Здесь интенсивность потока тепла, как и интенсивность потока массы, характеризуется вектором $\mathbf{q}$, так что поток тепла через малое сечение $\mathrm{d}s$ с нормалью $\mathbf{n}$ и в сторону нормали $\mathbf{n}$ равен

$$q_n\,\mathrm{d}s = q_k\,n_k\,\mathrm{d}s. \tag{5.5.7}$$

В-четвертых, энергия среды внутри объема $V$ может меняться за счет взаимодействия с электромагнитным полем, дополнительного к работе пондеромоторных сил (равной $\rho\ \mathbf{R}\cdot\mathbf{v}$), связанной со смешением частиц и уже учтенной в (5.5.5). Примером такого взаимодействия является поглощение оптического излучения, намагничивание, электрическая поляризация и т.д. Этот источник объемного энергообмена с электромагнитный полем будем характеризовать величиной, обозначаемой $W^{(\mathrm{int})}$, показывающей интенсивность поступления энергии из электромагнитного поля в единицу времени и в единицу массы и, как видно ниже, в ее внутреннюю энергию. В соответствии с представительностью $W^{(\mathrm{int})}$, указанный энергообмен электромагнитным полем для всего объема $V_E$ выражается в виде

$$\int_{V_E} \rho\,W\,\mathrm{d}V. \tag{5.5.8}$$

Заметим, что силовое воздействие электромагнитного поля на среду, т.е. пондеромоторные силы учитываются полем объемных сил $\mathbf{R}$, входящих в $\mathbf{F}$ (см. (5.3.3)), а соответствующее изменение кинетической энергии и полный приток энергии из электромагнитного поля описывается величиной

$$W^{(\mathrm{ext})} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{v} + W. \tag{5.5.9}$$

В итоге получаем уравнение полной энергии (full energy equation) в эйлеровом объеме $V_E$ в виде

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int\limits_{V_E} \rho E \,\mathrm{d}V = -\int\limits_{S_E} \rho\,(E\, v_k n_k + \boldsymbol{\sigma}_k n_k \cdot \mathbf{v} - q_k n_k)\,\mathrm{d}s + \int\limits_{V_E} \rho\,(\mathbf{F}\cdot\mathbf{v} + W)\,\mathrm{d}V. \tag{5.5.10}$$

Это балансовое уравнение энергии можно интерпретировать аналогично тому, как это было сделано для уравнений баланса массы (5.2.3), импульса (5.3.6) и момента импульса (5.4.3). Энергия среды внутри фиксированной области пространства может меняться за счет ее переноса вместе с массой через границу, работы внешних сил и притока тепла на границе, и энергообмена с проникающим в эту область внешним полем (гравитационным или электромагнитным).

Из анализа закона сохранения полной энергии для произвольного лагранжева объема $V_L$ получаем аналогично (5.2.6) и (5.3.6) уравнение в следующем виде

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int\limits_{V_L} \rho E \,\mathrm{d}V = \int\limits_{S_L} (\boldsymbol{\sigma}_n \cdot \mathbf{v} - q_n)\,\mathrm{d}s + \int\limits_{V_L} (\rho\,\mathbf{F}\cdot\mathbf{v} + W)\,\mathrm{d}V. \tag{5.5.11}$$

С помощью теоремы Гаусса-Остроградского поверхностные интегралы от потоков преобразуются в объемные интегралы от дивергенций. Далее, как и при выводе уравнений сохранения массы, импульса и момента импульса, используя теорему 3 из § 1 о нулевой подынтегральной функции, получим дифференциальное уравнение сохранения полной энергии в инерциальной системе координат:

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho E + \nabla_k (\rho E\, v_k) = \nabla_k (\sigma_k \cdot \mathbf{v}) - \nabla_k q_k + \rho\, \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} + \rho\, \mathbf{R} \cdot \mathbf{v} + \rho W. \qquad (5.5.12)$$

Используя равенство (5.2.8) для $f \equiv E$ и определения (5.5.1) для $E$, дифференциальное уравнение сохранения полной энергии среды может быть представлено в виде

$$\rho \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(u + \frac{v^2}{2}) = \nabla_k (\sigma_{kl}\, v_l) - \nabla_k q_k + \rho\, g_k v_k + \rho\, R_k v_k + \rho\, W \equiv$$

$$\equiv \rho\, A^{(\mathrm{ext})} + \rho\, W^{(\mathrm{ext})} + \rho\, Q^{(\mathrm{ext})} + \rho\, G^{(\mathrm{ext})} \qquad (5.5.13)$$

$$(\rho\, A^{(\mathrm{ext})} \equiv \nabla_k (\sigma_{kl}\, v_l), \qquad \rho\, G^{(\mathrm{ext})} \equiv \rho\, \mathbf{g} \cdot \mathbf{v},$$

$$\rho\, W^{(\mathrm{ext})} \equiv \rho\, W + \rho\, \mathbf{R} \cdot \mathbf{v}, \qquad \rho\, Q^{(\mathrm{ext})} \equiv - \nabla_k q_k).$$

Таким образом, изменение полной энергии материальной точки в сплошной среде происходит за счет работы $A^{(\mathrm{ext})}$ внешних поверхностных сил (external surface force power) на границе соответствующей частицы сплошной среды, работы $G^{(\mathrm{ext})}$ внешних гравитационных сил (external gravitational volume or mass force power) внешнего притока тепла (external heat flux) через границу соответствующей частицы сплошной среды, внешнего притока энергии из электромагнитного поля $W^{(\mathrm{ext})}$ (external electromagnetic energy flux), связанного как со смещением материальной частицы, т.е. работы пондеромоторных сил $\rho\mathbf{R} \cdot \mathbf{v}$, так и не связанных со смещением материальной частицы ($\rho W$), т.е. притока энергии за счет поляризации, намагничивания, перемещения зарядов и т.д.

## § 6. Дифференциальное уравнение для внутренней анергии – первое начало термодинамики

Вычтем из уравнения сохранения полной энергии (5.5.13) уравнение для кинетической энергии (5.3.11) и учтем, что

$$\nabla_k (\sigma_{kl}\, v_l) = \sigma_{kl} \nabla_k v_l + v_l \nabla_k \sigma_{kl}, \qquad (5.6.1)$$

тогда получим уравнение для внутренней энергии (internal energy equation), которое называют также уравнением притока тепла (heat flux equation)

$$\rho \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \rho A^{(\mathrm{int})} + \rho Q^{(\mathrm{ext})} + \rho W \qquad (5.6.2)$$

$$(\rho A^{(\mathrm{int})} \equiv \sigma_{kl} \nabla_k v_l, \quad \rho Q^{(\mathrm{ext})} \equiv -\nabla_k q_k).$$

Величина $A^{(\mathrm{int})}$, называемая по определению работой внутренних поверхностных сил (internal surface force power), в отличие от $A^{(\mathrm{ext})}$ является инвариантной, т.е. скаляром, и она инвариантна не только при поворотах и фиксированных переносах системы координат как произведение со сверткой двух тензоров $\sigma_{kl}$ и $\nabla_k v_l$ (см. теорему умножения в § 7 гл. 1), но и при перемещении системы координат с фиксированной скоростью $\mathbf{v}_0$ (преобразование Галилея $\mathbf{v}' = \mathbf{v} + \mathbf{v}_0$). Последнее следует из инвариантности при преобразовании Галилея тензора напряжение $\sigma_{kl}$ (впрочем, как и всех сил) и тензора

$$\nabla_k v_l' = \nabla_k (v_l + v_{0l}) = \nabla_k v_l. \qquad (5.6.3)$$

При отсутствии деформаций ($e_{kl} = 0$) работа внутренних поверхностных сил $A^{(\mathrm{int})}$ равна нулю. Действительно, учитывая симметрию тензора напряжений $\sigma_{kl}$, имеем

$$\rho A^{(\mathrm{int})} = \sigma_{kl} \nabla_k v_l = \sigma_{lk} \nabla_k v_l = \sigma_{kl} \nabla_l v_k = \tfrac{1}{2} \sigma_{kl} (\nabla_k v_l + \nabla_l v_k) = \sigma_{kl} e_{kl}. \qquad (5.6.4)$$

Таким образом, из уравнения притока тепла (5.6.2) следует, что внутренняя энергия материальной точки в сплошной среде меняется за счет работы внутренних сил $A^{(\mathrm{int})}$ на деформациях, внешнего притока тепла $Q^{(\mathrm{ext})}$ через границу соответствующей материальной частицы, и не связанного со смещением частицы, энергообмена $W$ внутренней энергии среды с электромагнитным полем. Величина $W$ аналогично $A^{(\mathrm{int})}$ может условно рассматриваться как "работа внутренних электромагнитных сил" в сплошной среде.

Учитывая формулу (5.6.1), уравнение кинетической энергии (5.3.12) в области, где поля скорости и напряжения дифференцируемы, может быть переписано в нескольких тождественных видах:

$$\rho \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{v^2}{2}\right) = \rho A^{(\mathrm{ext})} - \rho A^{(\mathrm{int})} + \rho\, \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} =$$

$$= \rho( A^{(\mathrm{ext})} - A^{(\mathrm{int})}) + \rho (W^{(\mathrm{ext})} - W^{(\mathrm{int})}) + \rho\, \mathbf{g} \cdot \mathbf{v}$$

$$= \rho A^{(\mathrm{kin})} + \rho W^{(\mathrm{kin})} + \rho\, \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} \qquad (5.6.5)$$

$$(\rho A^{(\mathrm{ext})} \equiv \rho A^{(\mathrm{kin})} + \rho A^{(\mathrm{int})} = \nabla_k (\sigma_{kl} v_l), \quad \rho A^{(\mathrm{int})} = \sigma_{kl} e_{kl}, \;\; \rho A^{(\mathrm{kin})} = v_l \nabla_k \sigma_{kl},$$

$$\rho W^{(\mathrm{ext})} = \rho W^{(\mathrm{int})} + \rho W^{(\mathrm{kin})}, \;\; W^{(\mathrm{int})} \equiv W, \;\; \rho W^{(\mathrm{kin})} = \rho\, \mathbf{R} \cdot \mathbf{v}).$$

Таким образом, кинетическая энергия материальной точки в сплошной среде меняется за счет работы внешних объемных сил ($\rho\mathbf{F}\cdot\mathbf{v}$), состоящей из работы гравитационных сил ($\mathbf{g}\cdot\mathbf{v}$) и электромагнитных сил ($\mathbf{R}\cdot\mathbf{v}$), а также работы поверхностных сил ($A^{(\mathrm{ext})}$) за вычетом работы внутренних поверхностных сил ($A^{(\mathrm{int})}$), которая идет на изменение внутренней энергии материальной точки.

Закон сохранения полной энергии в виде (5.5.10) – (5.5.13) или следующее из него уравнение для внутренней энергии (5.6.2) в термодинамике называют первым началом или законам термодинамики.

Основы термодинамики сплошных сред рассмотрены в гл. 6.

## § 7. Интегральные и дифференциальные уравнения для внутренней энергии и энтропии

Масса, импульс, момент импульса, полная энергия, заключенные внутри рассматриваемого объема, могут меняться только за счет внешних источников и полей, а именно: за счет притока через границу объема массы (а вместе с ней приносится в эйлеров объем и импульс, и момент импульса, и энергия, и другие экстенсивные характеристики), действия (т.е. импульса, момента импульса и их работы) внешних поверхностных сил (на границе объема), притока через границу объема тепла, действия гравитационных и электромагнитных полей (за счет гравитационных сил, пондеромоторных сил, их моментов), притока внутренней энергии из электромагнитного поля. Но есть такие свойства вещества и их характеристики, которые могут изменяться за счет внутренних взаимодействий. Например, внутренняя энергия может меняться за счет работы внутренних сил, энтропия расти за счет диссипации при взаимодействиях между частицами среды внутри рассматриваемой системы.

Запишем интегральное уравнение для изменения внутренней энергии в эйлеровом объеме $V_E$, ограниченном поверхностью $S_E$, аналогично тому, как это было сделано при выводе интегральных уравнений сохранения массы, импульса, момента импульса и полной энергии

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int\limits_{V_E}\rho\, u\, \mathrm{d}V = -\int\limits_{S_E}\rho\, v_n\, u\, \mathrm{d}s - \int\limits_{S_E} q_n\, \mathrm{d}s + \int\limits_{V_E}\rho\, W\, \mathrm{d}V + \int\limits_{V_E}\rho A^{(\mathrm{int})}\, \mathrm{d}V. \quad (5.7.1)$$

Здесь первое слагаемое в правой части определяет приток внутренней энергии извне вместе с массой, которая входит в объем $V_E$ через границу $S_E$, второе слагаемое – приток тепла извне через границу $S_E$, третье слагаемое – интенсивность перехода во внутреннюю энергию среды энергии электромагнитного поля и четвертое слагаемое – изменение внутренней энергии за счет работы внутренних сил при деформации среды. Интенсивность этого источника внутренней энергии $A^{(\mathrm{int})}$ подчиняется уравнению

$$A^{(\mathrm{ext})} = A^{(\mathrm{kin})} + A^{(\mathrm{int})}. \quad (5.7.2)$$

Работа внешних поверхностных сил $A^{(\mathrm{ext})}$ идет на изменение полной энергии, часть из которой ($A^{(\mathrm{kin})}$) идет на изменение кинетической энергии, а другая часть ($A^{(\mathrm{int})}$) - за на изменение внутренней энергии. При этом внутренняя энергия может изменяться и только за счет кинетическое энергии, например, при $A^{(\mathrm{ext})} = 0$. В (5.6.5) даны выражения для $A^{(\mathrm{ext})}$, $A^{(\mathrm{int})}$, $A^{(\mathrm{kin})}$, когда поля напряжений и скоростей непрерывно дифференцируемы.

Интегральное уравнение (5.7.1) можно получить и интегрируя по произвольному эйлерову объему $V_E$ дифференциальное уравнение притока тепла (5.6.2) и проводя в обратном порядке выкладки, аналогичные тем, которые приводят от (5.5.10) к (5.5.12). Но в этом случае уравнение (5.7.1) было бы обосновано только в тех случаях, когда все входящие в него функции были непрерывно дифференцируемы внутри $V_E$, чтобы существовали все производные, входящие в (5.6.2), и можно было использовать формулу Гаусса-Остроградского (5.1.25) при переходе от объемных интегралов к поверхностным (первые два слагаемых в правой части (5.7.1) и формулу дифференцирования объемного интеграла по времени (5.1.5)).

Балансовый анализ для внутренней энергии в произвольном конечном объеме $V_E$, приведший к интегральному уравнению (5.7.1), делает это уравнение справедливым и в тех случаях, когда внутри объема $V_E$ нарушена непрерывность функций, в частности, при наличии внутри $V_E$ поверхностей разрыва.

Проведем аналогичный балансовый анализ для энтропии среды $S_E$, заключенный в произвольном эйлеровом объеме $V_E$, учитывая, что энтропия, как масса, импульс, полная и внутренняя энергия, является аддитивной величиной:

$$\tilde{S}_E = \int\limits_{V_E} \rho\, s\, \mathrm{d}V, \tag{5.7.3}$$

где $s$ – энтропия среды, отнесенная к единице массы, или удельная энтропия.

Последовательное введение энтропии в соответствии со 2-м началом или законом термодинамики дано в гл. 6. Здесь же будем исходить из общего представления об энтропии, как параметре состояния термодинамической системы, меняющейся за счет подвода и отвода извне тепла, поделенного на абсолютную температуру в том месте, где это тепло подводится, и неотрицательной интенсивности внутреннего производства энтропии $\Phi \geq 0$, которое возникает в каждой материальной точке внутри области $V_E$ за счет внутренних диссипативных процессов, приводящих к выравниванию температур внутри области $V_E$, и к превращению в тепло механической и электромагнитной энергии. В соответствии со сказанным, интегральное уравнение баланса энтропии в $V_E$ имеет вид

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int\limits_{V_E} \rho\, s\, \mathrm{d}V = -\int\limits_{S_E} \rho\, v_n s\, \mathrm{d}s - \int\limits_{S_E} \frac{q_n}{T}\, \mathrm{d}s + \int\limits_{V_E} \rho\, \Phi\, \mathrm{d}V, \qquad \Phi \geq 0. \tag{5.7.4}$$

Здесь первое слагаемое в правой части – приток энтропии извне, приносимой вместе с массой, которая входит в объем $V_E$ через границу $S_E$; второе слагаемое – изменение энтропии за счет притока тепла извне; третье слагаемое – увеличение энтропии за счет неотрицательного внутреннего производства энтропии ($\Phi \geq 0$), возникающего в каждой точке внутри объема $V_E$.

Аналогично выписывается баланс энтропии и для фиксированного материального или субстанционального лагранжева объема среды

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int\limits_{V_L}\rho s\,\mathrm{d}V = -\int\limits_{S_L}\frac{q_n}{T}\mathrm{d}s + \int\limits_{V_L}\rho\Phi\,\mathrm{d}V, \quad \Phi \ge 0. \tag{5.7.5}$$

Подчеркнем, что наличие внутреннего источника энтропии за счет процессов взаимодействия между частицами среды внутри выделенной области, принципиально отличает баланс энтропии, как и баланс внутренней энергии, от баланса массы, импульса, момента импульса и полной энергии, которые не могут изменяться за счет взаимодействий между частицами среды внутри выделенной области, и меняются только за счет переноса извне и воздействий извне через границу области и через проникающие в область гравитационные и электромагнитные поля.

Можно высказать следующую аналогию. Нельзя создать устройство, с помощью которого можно было бы производить "валюту" в виде массы, импульса, момента импульса и энергии. Эта "валюта" может только переноситься с массой и передаваться с помощью сил, их моментов и работ, с помощью тепловых потоков и электромагнитных и гравитационных полей. Но повсюду имеются устройства и процессы, производящие "валюту" в виде энтропии. И чем больше производится этой "энтропийной валюты", тем больше более ценная физико-химическая механическая и электромагнитная ("свободно конвертируемая") энергетическая "валюта" переводится в менее ценную тепловую ("неконвертируемую").

Аналогично тому, как это делалось выше, из интегрального уравнения (5.7.3) или (5.7.4), в случае выполнения условий непрерывной дифференцируемости соответствующих подынтегральных функций, получается дифференциальное уравнение для изменения энтропии в материальной точке:

$$\rho\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = -\nabla_k\left(\frac{q_k}{T}\right) + \rho\,\Phi, \qquad \Phi \ge 0. \tag{5.7.6}$$

Неотрицательность внутреннего производства энтропии в виде неравенства $\Phi \ge 0$ называется неравенством Клаузиуса-Дюгема.

Полученное выражение для скорости изменения энтропии в материальной точке и неотрицательность ее внутреннего производства представляется и в другой форме:

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^{(\mathrm{ext})}}{\mathrm{d}t}s + \frac{\mathrm{d}^{(\mathrm{int})}}{\mathrm{d}t}s,$$

$$\frac{\mathrm{d}^{(\mathrm{ext})}}{\mathrm{d}t}s = -\nabla_k\left(\frac{q_k}{T}\right), \quad \frac{\mathrm{d}^{(\mathrm{int})}}{\mathrm{d}t}s \equiv \Phi \geq 0, \qquad (5.7.7)$$

где $\mathrm{d}^{(\mathrm{ext})}s\,/\,\mathrm{d}t$ соответствует первому слагаемому в правой части (5.7.5) и определяет изменение энтропии материальной точки за счет внешнего (external) источника (относительно ассоциированной с материальной точкой материальной частицы объемом $\delta V$) из-за потока энтропии $\mathbf{q}/T$, связанного с теплопроводностью; $\mathrm{d}^{(\mathrm{int})}s/\mathrm{d}t$ соответствует изменению энтропии материальной точки за счет внутреннего (internal) производства.

И, наконец, еще одна используемая форма неравенства Клаузиуса-Дюгема, учитывая определение для внешнего притока тепла $Q^{(\mathrm{ext})}$ в (5.5,12):

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \frac{Q^{(\mathrm{ext})}}{T} + \frac{Q'}{T}, \qquad (5.7.8)$$

$$\rho\, Q^{(\mathrm{ext})} = -\nabla_k\, q_k, \quad \rho\, Q' = -T\, q_k\, \nabla_k\left(\frac{1}{T}\right) + \rho\,\Phi\, T \equiv \frac{\mathbf{q}\cdot\nabla T}{T} + \rho\,\Phi\, T.$$

Эта форма используется при формулировке 2-го начала (закона) термодинамики, согласно которому величина $Q'$, называемая интенсивностью внутреннего источника некомпенсированного тепла, всегда неотрицательна:

$$Q' \geq 0. \qquad (5.7.9)$$

Это формально более сильное условие, нежели $\Phi \geq 0$, так как

$$\mathbf{q}\cdot\nabla\, T \leq 0, \quad Q' \leq \Phi\, T. \qquad (5.7.10)$$

Первое следует из того, что тепловой поток направлен из зоны с более высокой температурой в зону с более низкой температурой, т.е. $\mathbf{q}$ направлено против $\nabla\, T$.

Интенсивность (неотрицательную) производства энтропии за счет внутренних процессов можно представить в виде суммы неотрицательных составляющих:

$$\Phi = \Phi^{(q)} + \frac{Q'}{T} = \Phi^{(q)} + \Phi^{(A)} + \Phi^{(W)} + \ldots \qquad (5.7.11)$$

$$(\rho\, \varPhi^{(q)} \equiv \mathbf{q} \cdot \nabla \left(\frac{1}{T}\right), \quad \frac{Q'}{T} = \varPhi^{(A)} + \varPhi^{(W)} + \ldots),$$

где $\varPhi^{(A)}$, $\varPhi^{(W)}$, … – неотрицательные интенсивности производства энтропии, определяющие производство некомпенсированного тепла $Q'$ соответственно за счет диссипации при работе внутренних сил (чему соответствует верхний индекс $(A)$) из-за деформации материальной частицы, за счет диссипации при взаимодействии электромагнитного поля (чему соответствует верхний индекс $(W)$). Здесь же могут быть включены и другие неотрицательные составляющие $\varPhi$ или $Q'$, связанные с другими физико-химическими процессами. Но все эти составляющие, определяющие $Q'$, как будет показано ниже в § 3 гл. 6, должны быть определены при выборе модели процесса и среды. В этом смысле неотрицательное производство энтропии $\rho\, \varPhi^{(q)}$ из-за диссипации тепла при теплопроводности, приводящей к выравниванию температуры в частице среды и не связанное с некомпенсированный теплом $Q'$, уже определено и равно $(\mathbf{q} \cdot \nabla\, T)\, T^{-2}$.

Подчеркнем, что внутреннее производство энтропии $\varPhi$ определяется не только некомпенсированным теплом, но и теплопроводностью.

## § 8. Общий вид дифференциальных уравнений и интегральных уравнений сохранения в механике сплошной среды

Выпишем вместе интегральные уравнения, отражавшие балансы массы (5.2.3), импульса (5.3.5), момента импульса (5.4.30), энергии (5.5.10) и энтропии (5.7.3) для произвольного неподвижного эйлерова объема $V_E$ (фиксированного в пространстве), ограниченного неподвижной поверхностью $S_E$:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int\limits_{V_E} \rho\, \mathrm{d}V = \int\limits_{S_E} (-\,\rho\, v_k\, n_k)\, \mathrm{d}s, \tag{5.8.1}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int\limits_{V_E} \rho\, \mathbf{v}\, \mathrm{d}V = \int\limits_{S_E} (-\,\rho\mathbf{v}\, v_k + \boldsymbol{\sigma}_k)\, n_{kk}\, \mathrm{d}s + \int\limits_{V_E} \rho\, \mathbf{F}\, \mathrm{d}V, \tag{5.8.2}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int\limits_{V_E} \rho\, ([\mathbf{x} \times \mathbf{v}] + \mathbf{m})\, \mathrm{d}V = \tag{5.8.3}$$

$$= \int\limits_{S_E} (-\rho\, v_k\, ([\mathbf{x}\times\mathbf{v}] + \mathbf{m}) + [\mathbf{x}\times\boldsymbol{\sigma}_k] + \boldsymbol{\theta}_k)\, n_k\, \mathrm{d}s + \int\limits_{V_E} \rho\, ([\mathbf{x}\times\mathbf{F}] + \mathbf{M})\, \mathrm{d}V,$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int\limits_{V_E} \rho\, (u + \frac{v^2}{2})\, \mathrm{d}V = \tag{5.8.4}$$

$$= \int\limits_{S_E} (-\rho v_k\, (u + \frac{v^2}{2}) + \boldsymbol{\sigma}_k \cdot \mathbf{v} - q_k)\, n_k\, \mathrm{d}s + \int\limits_{V_E} \rho\, (\mathbf{F}\cdot\mathbf{v} + W)\, \mathrm{d}V,$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int\limits_{V_E} \rho\, s\, \mathrm{d}V = \int\limits_{S_E} (-\rho\, v_k\, s - \frac{q_k}{T})\, n_k\, \mathrm{d}s + \int\limits_{V_E} \rho\, \Phi\, \mathrm{d}V. \tag{5.8.5}$$

Эти же уравнения для произвольного лагранжева объема $V_L$ (объединяющего фиксированные материальные частицы (точки) и движущегося вместе с ними), который ограничен поверхностью $S_L$ (движущейся вместе с находящимися на ней материальными точками), имеют вид

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int\limits_{V_L} \rho\, \mathrm{d}V = 0, \tag{5.8.6}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int\limits_{V_L} \rho\, \mathbf{v}\, \mathrm{d}V = \int\limits_{S_L} \boldsymbol{\sigma}_k\, n_k\, \mathrm{d}s + \int\limits_{V_L} \rho\, \mathbf{F}\, \mathrm{d}V, \tag{5.8.7}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int\limits_{V_L} \rho\, ([\mathbf{x}\times\mathbf{v}] + \mathbf{m})\, \mathrm{d}V = \int\limits_{S_L} ([\mathbf{x}\times\boldsymbol{\sigma}_k] + \boldsymbol{\theta}_k)\, n_k\, \mathrm{d}s + \tag{5.8.8}$$

$$+ \int\limits_{V_L} \rho\, ([\mathbf{x}\times\mathbf{F}] + \mathbf{M})\, \mathrm{d}V,$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int\limits_{V_L} \rho\, (u + \frac{v^2}{2})\, \mathrm{d}V = \int\limits_{S_L} (\boldsymbol{\sigma}_k \cdot \mathbf{v} - q_k)\, n_k\, \mathrm{d}s + \int\limits_{V_L} \rho\, (\mathbf{F}\cdot\mathbf{v} + W)\, \mathrm{d}V, \tag{5.8.9}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int\limits_{V_L} \rho\, s\, \mathrm{d}V = \int\limits_{S_L} (-\frac{q_k}{T}) n_k\, \mathrm{d}s + \int\limits_{V_L} \rho\, \Phi\, \mathrm{d}V \qquad (\Phi \geq 0). \tag{5.8.10}$$

Отметим, что источниковые члены, распределенные по объему $V_E$ или

$V_L$, в уравнениях баланса для "сохраняющихся" или "непроизводимых" величин, каковыми являются импульс, момент импульса и полная энергия, определяются воздействиями внешних по отношению к веществу, заключенному в объеме $V_E$ или $V_L$, гравитационного и электромагнитного полей. А источниковый неотрицательный член, распределенный в объеме $V_E$ или $V_L$, в уравнении баланса для энтропии, которая является "производимой" величиной, определяется внутренними процессами взаимодействия между материальными точками внутри $V_E$ или $V_L$.

Из интегральных уравнений следуют дифференциальные уравнения массы (5.2.4), импульса (5.3.10), момента импульса (5.4.23), энергии (5.5.12) и энтропии (5.7.5) для материальной точки в области непрерывного движения, где определяются входящие в эти уравнения производные по времени и координатам:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla_k \rho\, v_k = 0, \qquad (5.8.11)$$

$$\rho \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} = \nabla_k \boldsymbol{\sigma}_k + \rho\, \mathbf{F}, \qquad (5.8.12)$$

$$\rho \frac{\mathrm{d}\mathbf{m}}{\mathrm{d}t} = \nabla_k \boldsymbol{\theta}_k + \rho\, \mathbf{M} + [\boldsymbol{\sigma}] \quad ([\boldsymbol{\sigma}] = \mathbf{e}_i\, \varepsilon_{ikm}\, \sigma_{mk}), \qquad (5.8.13)$$

$$\rho \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(u + \frac{v^2}{2}\right) = \nabla_k ((\boldsymbol{\sigma}_k \cdot \mathbf{v}) - q_k) + \rho(\mathbf{F} \cdot \mathbf{v} + W), \qquad (5.8.14)$$

$$\rho \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = -\nabla_k \left(\frac{q_k}{T}\right) + \rho\, \Phi \quad (\Phi \ge 0), \qquad (5.8.15)$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial}{\partial t} + v_k \nabla_k \quad \text{или} \quad \rho \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \rho f}{\partial t} + \nabla_k \rho f v_k\right). \qquad (5.8.16)$$

Еще раз отметим, что в отличие от источниковых членов в уравнениях импульса ($\rho\, \mathbf{F}$), момента импульса ($\rho M$) и энергии ($\rho(\mathbf{F} \cdot \mathbf{v} + W)$) источниковый член $\rho\Phi$ в уравнении для энтропии определяется процессами внутри ассоциированной с материальной точкой частицы.

Введем обобщенный параметр $f$, определяющий или массу, или импульс, или момент импульса, или полную энергию, или энтропию. Введем обобщенный параметр $\psi_k$, определяющий взаимодействие в сплошной среде или воздействие внешней среды на выделенную частицу через граничную поверхность. Введем обобщенный параметр $\mathsf{F}$, определяющей воздействие внешнего гравитационного или электромагнитного поля на выделенную частицу. И, наконец, внутренне производство $\Phi$, которое для массы, импульса, момента импульса и полной энергии равно нулю, и может быть положительной для производства энтропии внутри частицы. Возможные варианты для этих обобщенных параметров $f$, $\psi_k$, $\mathsf{F}$ и $\Phi$ сведены в таблицу

| $f$ | 1 | $\mathbf{v}$ | $[\mathbf{x}\times\mathbf{v}]+\mathbf{m}$ | $u+½\,v^2$ | $u$ | $S$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\psi_k$ | 0 | $\boldsymbol{\sigma}_k$ | $[\mathbf{x}\times\boldsymbol{\sigma}_k]+\boldsymbol{\theta}_k$ | $\boldsymbol{\sigma}_k\cdot\mathbf{v}-q_k$ | $-q_k$ | $-q_k/T$ |
| $\mathbf{F}$ | 0 | $\mathbf{F}$ | $[\mathbf{x}\times\mathbf{F}]+\mathbf{M}$ | $\mathbf{F}\cdot\mathbf{v}+W$ | 0 | 0 |

(5.8.17)

Тогда интегральные уравнения баланса (5.8.1)–(5.8.5) для эйлерова объема $V_E$ можно записать в единообразной форме:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int\limits_{V_E}\rho f\,\mathrm{d}V=\int\limits_{S_E}(-\rho\,v_k+\psi_k)\,n_k\,\mathrm{d}s+\int\limits_{V_E}\rho\,\mathsf{F}\,\mathrm{d}V. \qquad (5.8.18)$$

Если в этом уравнении в качестве $f$, $\psi_k$, $\mathsf{F}$ использовать наборы из разных столбцов в таблице (5.8.17), то получим все соответствующие уравнения сохранения (5.8.1) – (5.8.5).

Аналогично, интегральные уравнения баланса для лагранжева объема имеют вид

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int\limits_{V_L}\rho f\,\mathrm{d}V=\int\limits_{S_L}\psi_k\,n_k\,\mathrm{d}s+\int\limits_{V_L}\rho\,\mathsf{F}\,\mathrm{d}V. \qquad (5.8.19)$$

Дифференциальные уравнения баланса (5.8.11)–(5.8.15) можно записать в виде

$$\rho\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}=\nabla_k\,\psi_k+\rho\mathsf{F} \qquad (5.8.20)$$

$$(\rho\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}=\rho(\frac{\partial f}{\partial t}+v_k\,\nabla_k f)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}+\nabla_k\,(\rho v_k f).$$