Глава 5. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ, Д)ИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И УРАВНЕНИЯ НА ПОВЕРХНОСТЯХ РАЗРЫВА, СЛЕДУЮЩИЕ ИЗ ЗАКОНОВ СОХРАНЕНИЯ

§ 1. Три теоремы для интегралов по объемам и их граничным поверхностям от дифференцируемых функций

В механике сплошной среды при анализе законов сохранения широко используются ряд теорем и формул математической теории поля. Ниже рассмотрены три наиболее важные теоремы.

Дифференцирование интеграла по объему. Рассмотрим производную по времени от интеграла по подвижному (переменному по времени) объему

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int\limits_{V(t)} f\ (\mathbf{x},t)\,\mathrm{d}V = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\left\{\int\limits_{V(t+\Delta t)} f(\mathbf{x},t+\Delta t)\,\mathrm{d}V - \int\limits_{V(t)} f(x,t)\,\mathrm{d}V\right\} =$$

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\left\{\int\limits_{V(t+\Delta t)} f(\mathbf{x},\ t+\Delta t)\,\mathrm{d}V - \int\limits_{V(t+\Delta t)} f(\mathbf{x},t)\,\mathrm{d}V + \int\limits_{V(t+\Delta t)} f(\mathbf{x},t)\,\mathrm{d}V -\right.$$

$$\left. - \int\limits_{V(t)} f\ (\mathbf{x},t)\,\mathrm{d}V \right\} = \qquad (5.1.1)$$

$$= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\left\{\int\limits_{V(t+\Delta t)} f(\mathbf{x},\ t+\Delta t) - f(\mathbf{x},t)]\,\mathrm{d}V + \int\limits_{V(t+\Delta t)\text{-}V(t)} f(\mathbf{x},t)\ \mathrm{d}V\right\}.$$

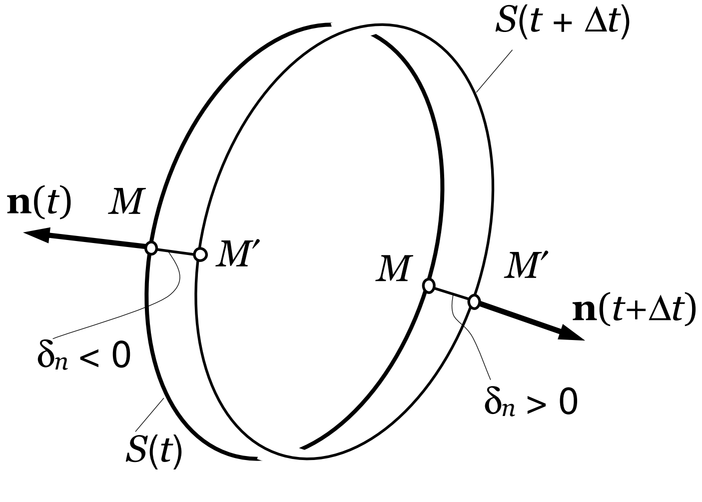

Рис. 5.1.1

На рис. 5.1.1 схематично показаны объемы $V(t)$, $V(t + \Delta t)$ и ограничивающие их поверхности $S(t)$ – жирной линией и $S(t + \Delta t)$ – тонкой линией. Показаны внешние (по отношению к $V(t)$ единичные нормали $\mathbf{n}$ к поверхности $S(t)$ и $S(t + \Delta t)$. Объемы $V(t + \Delta t) - V(t)$ можно представить как совокупность цилиндров объемом

$$\delta V = (\Delta\mathbf{x} \cdot \mathbf{n})\,\mathrm{d}s \quad (\Delta\mathbf{x} \cdot \mathbf{n} \equiv \delta_n), \tag{5.1.2}$$

где $\Delta\mathbf{x}$ – перемещение точки поверхности за время Δt, устанавливающее закон соответствия точек поверхности $S(t)$ в разные моменты времени. Далее существенным будет перемещение или соответствие точек $S(t)$ только вдоль нормали $\mathbf{n}$. Знак $(\Delta\mathbf{x} \cdot \mathbf{n} \equiv \delta_n)$ определяет знак, с которым входит соответствующий элементарный объем δV в интеграле по $V(t + \Delta t) - V(t)$ в (5.1.1), а именно: если $S(t)$ смещается во вне от объема $V(t)$, то $\delta_n > 0$ и $\delta V > 0$; если $S(t)$ смещается внутрь объема $V(t)$, то $\delta_n < 0$ и $\delta V < 0$.

Если известен закон перемещения граничной поверхности $S(t)$ или закон соответствия ее точек в равные моменты времени в виде $\Delta\mathbf{x} = \Delta\mathbf{x}(\mathbf{x}, t)$, то в каждой точке $S(t)$ можно определить скорость перемещения поверхности вдоль внешней нормали

$$N = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{(\Delta\mathbf{x} \cdot \mathbf{n})}{\Delta t}. \tag{5.1.3}$$

Причем $N > 0$, если $S(t)$ смещается в сторону $\mathbf{n}$, т.е. во внешность объема $V(t)$, и $N < 0$, если $S(t)$ смещается против $\mathbf{n}$, т.е. внутрь объема $V(t)$. Примеры определения и вычисления нормальной скорости N перемещения поверхности $S(t)$ даны чуть ниже.

А сейчас, возвращаясь (5.1.1), имеем

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int\limits_{V(t)} f\,(\mathbf{x}, t)\,\mathrm{d}V = \lim_{\Delta t \to 0} \left\{ \int\limits_{V(t+\Delta t)} \frac{f(\mathbf{x}, t+\Delta t) - f(\mathbf{x}, t)}{\Delta t}\,\mathrm{d}V + \right.$$

$$\left. + \int\limits_{S(t)} f(\mathbf{x}, t)\,\frac{\Delta\mathbf{x} \cdot \mathbf{n}}{\Delta t} \right\} \mathrm{d}s. \tag{5.1.4}$$

В результате можно сформулировать теорему.

Теорема 1 (теорема дифференцирования интеграла по переменному по времени объему). Производная по времени от интеграла по объему $V(t)$, ограниченному поверхностью $S(t)$, когда подынтегральная функция $f(\mathbf{x}, t)$ дифференцируемая функция по времени, а точки граничной поверхности $S(t)$ перемещаются с нормальной скоростью N, определяется следующим выражением

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int\limits_{V(t)} f\,(\mathbf{x}, t)\,\mathrm{d}V = \int\limits_{V(t)} \frac{\partial f(\mathbf{x}, t)}{\partial t}\,\mathrm{d}V + \int\limits_{S(t)} f\,(\mathbf{x}, t)\,N(\mathbf{x}, t)\,\mathrm{d}s. \tag{5.1.5}$$

Далее будут рассматриваться два типа произвольных объемов в сплошной среде.

Первый тип – эйлеров объем V_E, ограниченный поверхностью S_E, где V_E и S_E фиксированы в системе координат наблюдателя, т.е. граничная поверхность S_E – неподвижна и $N = 0$:

$$V_E = \text{const}, \quad S_E = \text{const}, \quad N = 0. \tag{5.1.6}$$

Второй тип – лагранжев объем V_L, ограниченный поверхностью S_L, где V_L и S_L перемещаются в пространстве со сплошной средой, т.е. объем V_L включает фиксированную совокупность материальных точек сплошной среды. Такое определение $V_L(t)$ и $S_L(t)$ возможно в силу принятой гипотезы индивидуализации материальных точек (см. § 2 гл. 2).

Эйлеров объем V_E и его граничная поверхность S_E фиксированы и постоянны, лагранжев объем V_L и его граничная поверхность S_L перемещаются в соответствии с полем скоростей

$$V_L = V_L(t), \quad S_L = S_L(t), \quad \frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t), \quad N = \mathbf{v}\cdot\mathbf{n} \equiv \upsilon_n. \tag{5.1.7}$$

Для неподвижного эйлерова объема в каждой точке S_E имеем $N = 0$, и из (5.1.5) имеем теорему коммутативности интегрирования по объему и дифференцирования по времени

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int\limits_{V_E} f\,(\mathbf{x}, t)\,\mathrm{d}V = \int\limits_{V_E} \frac{\partial f(\mathbf{x}, t)}{\partial t}\,\mathrm{d}V, \tag{5.1.8}$$

т.е. производная по времени от интеграла по эйлерову объему равна интегралу по объему от производной по времени.

Для лагранжева объема в каждой точке S_L имеем $N = v_n$, и из (5.1.5) следует

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int\limits_{V_L} f(\mathbf{x}, t)\,\mathrm{d}V = \int\limits_{V_L} \frac{\partial f(\mathbf{x}, t)}{\partial t}\,\mathrm{d}V + \int\limits_{S_L} f(\mathbf{x}, t)\, v_n(\mathbf{x}, t)\,\mathrm{d}s, \qquad (5.1.9)$$

т.е. дифференцирование по времени и интегрирование по лагранжеву объему некоммутативны.

Покажем, как вычислить N в на примере задания $S(t)$ в виде

$$\psi(x_1, x_2, x_3, t) = 0. \qquad (5.1.10)$$

Изменением знака у функции ψ можно добиться того, чтобы рост ψ в фиксированный момент времени t был при перемещении от точек $\mathbf{x}$, лежащих на $S(t)$ во вне объема $V(t)$. Тогда направление единичной нормали, внешней по отношению к $V(t)$, в каждой точке S и в каждой фиксированный момент времени устанавливается по формуле

$$\mathbf{n} = \frac{\nabla\psi}{|\nabla\psi|}. \qquad (5.1.11)$$

Используем формулу для разложения функции $\psi(\mathbf{x}, t)$:

$$\psi(\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}, t + \Delta t) - \psi(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial\psi}{\partial x_i}\Delta x_i + \frac{\partial\psi}{\partial t}\Delta t + o(\Delta x, \Delta t). \qquad (5.1.12)$$

В более подробном виде это представляет собой следующую формулу:

$$\psi(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, x_3 + \Delta x_3, t + \Delta t) - \psi(x_1, x_2, x_3, t) = \qquad (5.1.12a)$$

$$= \frac{\partial\psi}{\partial x_1}\Delta x_1 + \frac{\partial\psi}{\partial x_2}\Delta x_2 + \frac{\partial\psi}{\partial x_3}\Delta x_3 + \frac{\partial\psi}{\partial t}\Delta t + o(\Delta x, \Delta t).$$

Пусть (см. рис. 5.1.1) точка M с координатами $(\mathbf{x}, t) = (x_1, x_2, x_3, t)$ находится (в момент t) на поверхности $S(t)$, а точка M' с координатами $(\mathbf{x} + \mathbf{n}\,\delta_n, t + \Delta t) \equiv (x_1 + n_1\delta_n, x_1 + n_2\delta_n, x_3 + n_3\delta_n, t + \Delta t)$ находится (в момент $t + \Delta t$) на поверхности $S(t + \Delta t)$, т.е.

$$\psi(\mathbf{x}, t) \equiv \psi(x_1, x_2, x_3, t) = 0, \qquad (5.1.13)$$

$$\psi(\mathbf{x} + \mathbf{n}\,\delta_n, t + \Delta t) \equiv \psi(x_1 + n_1\delta_n, x_1 + n_2\delta_n, x_3 + n_3\delta_n, t + \Delta t) = 0.$$

Тогда из (5.1.12) следует для $\Delta\mathbf{x} = \mathbf{n}\,\delta_n$ или $\Delta x_i = n_i\,\delta_n$

$$\frac{\partial\psi}{\partial x_i} n_i\, \delta_n + \frac{\partial\psi}{\partial t}\Delta t + o(\delta_n, \Delta t) = 0. \qquad (5.1.14)$$

Первое слагаемое (свертку по i, если учесть (5.1.11), можно представить в виде

$$\delta_n \frac{\partial\psi}{\partial x_i} n_i = \delta_n (\nabla\psi \cdot \mathbf{n}) = \delta_n \frac{\nabla\psi\cdot\nabla\psi}{|\nabla\psi|} = \delta_n \frac{|\nabla\psi|^2}{|\nabla\psi|} = \delta_n\, |\nabla\psi|, \qquad (5.1.15)$$

и (5.1.14) можно переписать

$$\delta_n\, |\nabla\psi| + \frac{\partial\psi}{\partial t}\Delta t + o(\delta_n, \Delta t) = 0. \qquad (5.1.16)$$

Тогда используя определение N в (5.1.3), получим

$$N = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\delta_n}{\Delta t} = -\frac{(\partial\psi/\partial t)}{|\nabla\psi|}. \qquad (5.1.17)$$

Преобразование поверхностного интеграла от потока к объемному интегралу от дивергенции. Теорема Гаусса-Остроградского. Изменение величины малого лагранжева объема δV сплошной среды определяется скоростями на его границе δS

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta V) = \lim_{\substack{\Delta t\to 0\\ \delta V\to 0}} \frac{\delta V(t+\Delta t)-\delta V(t)}{\Delta t} = \int\limits_{\delta V} v_i\, n_i\, \mathrm{d}s. \qquad (5.1.18)$$

С другой стороны из (2.8.24) известно, что

$$\lim_{\delta V\to 0} \frac{1}{\delta V}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta V) = e_{ii} = \nabla_i\, v_i. \qquad (5.1.19)$$

Таким образом, можно записать, что

$$\int\limits_{\delta S} v_i\, n_i\, \mathrm{d}s = \delta V \cdot \nabla_i\, v_i + o(\delta V), \qquad (5.1.20)$$

имея в виду, что $\nabla_i\, v_i$ взято в центре объема δV. Любой конечный объем V можно разбить на совокупность достаточно малых объемов $\delta V^{(k)}$, малых в том смысле, что величина $\nabla_i v_i$ в пределах $\delta V^{(k)}$ меняется мало, или другими словами $\sqrt[3]{\delta V^{(k)}} \ll L$, где L – характерный размер рассматриваемого процесса или задачи. Просуммируем уравнение (5.1.20) по всем объемам

$$\sum_{k=1}^{K} \int\limits_{\delta S^{(k)}} v_i n_i \, \mathrm{d}s = \sum_{k=1}^{K} \left(\nabla_i v_i\right)^{(k)} \delta V^{(k)} + \sum_{k=1}^{K} o\left(\delta V^{(k)}\right). \qquad (5.1.21)$$

По "внутренним" границам объемов $\delta V^{(k)}$, лежащим внутри V интегралы по $\delta S^{(k)}$ взаимно сокращаются, гак как для соседних объемов внесшие нормали на поверхности их разделяющей направлены в противоположные стороны

$$n_i\big|_{\delta S^{(k)}} = -n_i\big|_{\delta S^{(k+1)}}; \quad v_i n_i\big|_{\delta S^{(k)}} = -v_i n_i\big|_{\delta S^{(k+1)}}.$$

Поэтому для любого разбиения имеет место

$$\sum_{k=1}^{K} \int\limits_{\delta S^{(k)}} v_i \, n_i \, \mathrm{d}s = \int\limits_{S} v_i \, n_i \, \mathrm{d}s. \qquad (5.1.22)$$

Переходя к пределу при $K \to \infty$, $\max(\delta V^{(k)}) \to 0$, получим, что первая сумма в правой части переходит в интеграл по объему V, а вторая сумма стремится к нулю

$$\sum_{k=1`}^{K} (\nabla_i v_i)^k \, \delta V^{(k)} \to \int\limits_{V} (\nabla_i v_i) \, \mathrm{d}V,$$

$$\sum_{k=1`}^{K} \mathrm{o}(\delta^{(k)}) = K \cdot \mathrm{o}(\delta V^{(k)}) = \frac{V}{\delta V} \mathrm{o}(\delta V^{(k)}) \to 0. \qquad (5.1.23)$$

В итоге получим

$$\int\limits_{S} v_i \, n_i \, \mathrm{d}s = \int\limits_{V} \nabla_i \, v_i \, \mathrm{d}V. \qquad (5.1.24)$$

Любое векторное поле $\mathbf{A} = A_i \, \mathbf{e}_i$ может рассматриваться как некоторое поле скоростей, и для него можно записать уравнение, аналогичное (5.1.24), где вместо v_i следует иметь в виду A_i. Несложными рассуждениями можно показать, что это выражение справедливо для тензорного поля любого ранга. В итоге имеем теорему.

Теорема 2 (теорема Гаусса-Остроградекого). Для любой дифференцируемой тензорной функции, любого ранга, заданной в произвольном объеме V, ограниченном поверхностью S, имеет место равенство поверхностного интеграла от потока ($A_n = A_i\, n_i$) и объемного интеграла от дивергенции ($\mathrm{div}\mathbf{A} = \nabla_i A_i$):

$$\int_S A_i\, n_i\, \mathrm{d}s = \int_V \nabla_i A_i\, \mathrm{d}V. \tag{5.1.25}$$

Применяя эту теорему к интегралу по поверхности S_L в формуле (5.1.9) для дифференцирования интеграла по подвижному лагранжеву объему V_L, получим

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_{V_L} f\,(\mathbf{x}, t)\, \mathrm{d}V = \int_{V_L} \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \nabla_i (f v_i) \right) \mathrm{d}V. \tag{5.1.26}$$

Теорема о подынтегральной функции. Сформулируем достаточное условие равенства нулю подынтегральной функции.

Теорема 3 (теорема о нулевой подынтегральной функции): Если для непрерывной функции $\Phi(\mathbf{x}, t)$, заданной в области V и для любого объема V в области $\tilde{V}$ имеет место

$$\int_V \Phi\; \mathrm{d}V = 0, \tag{5.1.27}$$

то в области $\tilde{V}$ имеет место

$$\Phi = 0. \tag{5.1.27a}$$

Доказательство от противного. Пусть в области $\tilde{V}$ имеется точка M, где $\Phi \neq 0$, например, $\Phi > 0$. Так как $\Phi(\mathbf{x})$ – непрерывная функция, то около точки M можно выделить объем ΔV, во всех точках которого $\Phi > 0$. Тогда $\int_V \Phi\; \mathrm{d}V > 0$, т.е. в области $\tilde{V}$ нашелся объем ΔV, для которого нарушается условие (5.1.26), которое должно выполняться для любого объема. Поэтому имеет место (5.1.27) во всех точках области.

§ 2. Интегральные и дифференциальные уравнения сохранения массы

Рассмотрим произвольный, фиксированный в системе координат наблюдателя, эйлеров объем V_E, ограниченный фиксированной поверхностью S_E, через которую проходит сплошная среда. Распределения масс (плотностей), скоростей, напряжений, массовых сил и т.д. будем описывать в эйлеровых переменных x_1, x_2, x_3, t. Соответствующие этим распределениям функции в соответствии с основным допущением механики сплошных сред будем полагать непрерывными, за исключением, быть может, отдельных поверхностей, линий и точек. При этом интегрируемость этих функций по объемам и поверхностям всегда имеет место.

Рассмотрим баланс массы в этом неподвижном (эйлеровом) объеме. Масса вещества в этом объеме $M_E(t)$ и скорость ее изменения $\mathrm{d}M_E/\mathrm{d}t$ представляются в виде интеграла и произвольной по времени этого интеграла

$$M_E(t) = \int\limits_{V_E} \rho\,(\mathbf{x},\, t)\,\mathrm{d}V,$$

$$\frac{\mathrm{d}M_E}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int\limits_{V_E} \rho(\mathbf{x},t)\;\mathrm{d}V \tag{5.2.1}$$

В соответствии с законом сохранения масса вещества в объеме V_E может изменяться только за счет притока и оттока вещества через границу S_E. Этот приток или отток массы согласно (2.9.20) определяется интегралом по поверхности S_E от вектора потока массы $\mathbf{j} = \rho\,\mathbf{v}$.

В итоге получим *закон сохранения массы для эйлерова объема V_E в виде интегрального уравнения*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int\limits_{V_E} \rho(\mathbf{x},t)\;\mathrm{d}V = -\int\limits_{S_E} \rho\, v_k\, n_k\, \mathbf{v}\;\mathrm{d}s, \tag{5.2.2}$$

где $\mathbf{n} = n_k\,\mathbf{e}_k$ – единичная внешняя (по отношению к объему V_E) нормаль к поверхности S_E.

Если функции $\rho(\mathbf{x},\, t)$ и $\mathbf{v}(\mathbf{x},\, t)$ являются дифференцируемыми функциями по времени и пространственным координатам, то в (5.2.2) для производной по времени от интеграла по объему можно использовать теорему 1 предыдущего параграфа, которая для эйлерова объема V_E сводится к (5.1.8):

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int\limits_{V_E} \rho(\mathbf{x},t)\;\mathrm{d}V = \int\limits_{V_E} \frac{\partial\rho}{\partial t}\,\mathrm{d}V, \tag{5.2.3}$$

а для интеграла по поверхности S_E можно использовать терему Гаусса-Остроградского (теорему 2 или (5.1.25)):

$$-\int_{S_E} \rho\, v_k\, n_k\, \mathbf{v}\, \mathrm{d}s = -\int_{V_E} \nabla_k\, (\rho v_k)\, \mathrm{d}V. \tag{5.2.4}$$

Тогда закон сохранения массы (5.2.2) сведется к виду

$$\int_{V_E} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla_k (\rho v_k) \right) \mathrm{d}V = 0. \tag{5.2.5}$$

Так как равенство нулю этого интеграла справедливо для любого произвольного объема V_E, то в силу теоремы 3 предыдущего параграфа (см. (5.1.27), (5.1.27a)), получаем, что в каждой точке равна нулю подынтегральная функция

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla_k \rho v_k = 0. \tag{5.2.6}$$

Этот дифференциальное уравнение сохранения массы (mass conservation differential equation), называемый уравнением неразрывности, уже выводился ранее (см. (2.9.14)) другим методом.

Если аналогично вместо произвольного эйлерового объема рассмотреть произвольный лагранжевый объем сплошной среды V_L (с фиксированными материальными частицами), то в соответствии с законом сохранения массы, масса среды в этом подвижном объеме не меняется

$$M_L = \int_{V_L} \rho(\mathbf{x}, t)\, \mathrm{d}V, \qquad \frac{\mathrm{d}M_L}{\mathrm{d}t} = 0.$$

Таким образом *закон сохранения массы для лагранжева объема* V_L имеет вид

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_{V_L(t)} \rho(\mathbf{x}, t)\, \mathrm{d}V = 0. \tag{5.2.7}$$

Если функции $\rho(\mathbf{x}, t)$ и $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ являются дифференцируемыми функциями по времени и пространственным координатам, то аналогично (5.2.3) используя теорему 1 и теорему Гаусса-Остроградского (теорему 2) для производной по времени от интеграла по переменному объему, которые для лагранжева объема сводятся к (5.1.26), получим:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int\limits_{V_L(t)}\rho(\mathbf{x},t)\,\mathrm{d}V=\int\limits_{V_L}\left(\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla_k(\rho v_k)\right)\mathrm{d}V=0. \qquad (5.2.8)$$

Из-за того, что это равенство справедливо для любого объема V_L , отсюда следует дифференциальное уравнение сохранения массы (5.2.4).

Заметим, что формула (5.1.26) для дифференцирования интеграла по лагранжевому объему V_L применительно к функции ρf, (где f – произвольная непрерывно дифференцируемая функция) может быть переписана в виде

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int\limits_{V_L(t)}\rho f\,\mathrm{d}V=\int\limits_{V_L}\left(\frac{\partial\rho f}{\partial t}+\nabla_k(\rho v_k f)\right)\mathrm{d}V=\int\limits_{V_L}\rho\,\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}V. \qquad (5.2.9)$$

Здесь использована формула (4.1.8), являющаяся следствием уравнения неразрывности (5.2.4).

§ 3. Интегральное и дифференциальное уравнения сохранения импульса

Импульс (momentum) I_E и скорость его изменения $\mathrm{d}I_E/\mathrm{d}t$ в произвольном эйлеровом объеме V_E определяем интегралом и соответствующей производной

$$I_E=\int\limits_{V_E}\rho\,\mathbf{v}\,\mathrm{d}V,\quad \frac{\mathrm{d}I_E}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int\limits_{V_E}\rho\,\mathbf{v}\,\mathrm{d}V. \qquad (5.3.1)$$

В соответствии с законом сохранения импульса, импульс в фиксированном эйлеровом объеме может меняться, во-первых, за счет притока и оттока импульса вместе с притекающей и оттекающей массой (следует иметь в виду, что приходящая и уходящая среда помимо массы приносит импульс, энергию, энтропию, энтальпию и другие экстенсивные характеристики вещества) через границу, что называется конвективным переносом импульса. Интенсивность этого переноса равна[1]

$$\int\limits_{S_E} j_n \, \mathbf{v} \, \mathrm{d}s. \tag{5.3.2}$$

Во-вторых, импульс среды внутри V_E может меняться за счет действия внешних сил: поверхностных сил вдоль границы S_E и объемных сил внутри V_E. Импульс этих сил в единицу времени равен

$$\int\limits_{S_E} \boldsymbol{\sigma}_n \, \mathrm{d}s + \int\limits_{V_E} \rho \, \mathbf{F} \, \mathrm{d}V \quad (\mathbf{F} = \mathbf{g} + \mathbf{R} + \mathbf{F}^{\mathrm{in}\prime}), \tag{5.3.3}$$

имея в виду (см.(3.1.3)), что обычно объемная сила $\mathbf{F}$ есть сумма гравитационных ($\mathbf{g}$) и электромагнитных ($\mathbf{R}$) сил и сил инерции ($\mathbf{F}^{\mathrm{in}\prime}$) из-за неинерциальности выбранной системы координат).

В итоге, учитывая, что $j_n = \rho v_k \, n_k$, $\boldsymbol{\sigma}_n = \boldsymbol{\sigma}_k \, n_k$ получим *интегральное представление закона сохранения импульса* (momentum conservation law) для эйлерового объема V_E

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int\limits_{V_E} \rho \, \mathbf{v} \, \mathrm{d}V = -\int\limits_{S_E} \rho \, v_k n_k \mathbf{v} \, \mathrm{d}s + \int\limits_{S_E} \boldsymbol{\sigma}_k n_k \, \mathrm{d}s + \int\limits_{V_E} \rho \, \mathbf{E} \, \mathrm{d}V. \tag{5.3.4}$$

Это балансовое уравнение импульса можно интерпретировать следующим высказыванием. Импульс среды внутри фиксированной области пространства может меняться за счет его (импульса) переноса через границу вместе с массой, и действия внешних сил вдоль границы и внешних, проникающих в эту область, сил со стороны внешнего поля (гравитационного или электромагнитного).

Такое же интегральное уравнение сохранения импульса получается, если закон сохранения импульса рассмотреть для переменного лагранжевого объема $V_L(t)$ из фиксированных материальных точек сплошной среды. Импульс такого объема меняется только за счет действия внешних сил (5.3.3), и *закон сохранения количества движения для лагранжевого объема* V_L в виде интегрального уравнения имеет вид

[1] Далее для упрощения и единообразия нижний индекс n, соответствующий проекциям векторов и тензоров

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int\limits_{V_L(t)}\rho\,\mathbf{v}\,\mathrm{d}V=\int\limits_{S_L}\boldsymbol{\sigma}_k\,n_k\,\mathrm{d}s+\int\limits_{V_L}\rho\,\mathbf{F}\,\mathrm{d}V, \tag{5.3.5}$$

Таким образом, при рассмотрении закона сохранения для лагранжева объема фиксированной совокупности материальных частиц сплошной среды отсутствует член с конвективным переносом через границу объема, так как он включен в производную по времени от интеграла по лагранжеву объему из-за переменности последнего. Если учесть (5.1.9), то видно, что (5.3.5) эквивалентно (5.3.4).

Если поля плотности ρ, скорости **v** и напряжений σ_{ik} являются дифференцируемыми, то аналогично (5.2.3) – (5.2.5) можно использовать формулу (5.1.8) о дифференцировании интеграла по эйлеровому объему и формулу Гаусса-Остроградского (5.1.25) для приведения поверхностного интеграла от потока к объемному интегралу от дивергенции. В результате получим равенство нулю интеграла для любого эйлерового объема V_E:

$$\int\limits_{V_E}\left(\frac{\partial}{\partial t}(\rho\mathbf{v})+\nabla_k(\rho\,\mathbf{v}\,v_k)-\nabla_k\boldsymbol{\sigma}_k-\rho\mathbf{F}\right)\mathrm{d}V=0. \tag{5.3.6}$$

В силу произвольности объема V_E, получим в соответствии с (5.1.27), что в каждой точке, где все функции непрерывны и дифференцируемы, имеет место

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho\,\mathbf{v}+\nabla_k(\rho\mathbf{v}v_k)=\nabla_k\,\boldsymbol{\sigma}_k+\rho\,\mathbf{F}. \tag{5.3.7}$$

Раскрывая немое суммирование, это уравнение переписывается в виде

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\mathbf{v})+\frac{\partial}{\partial x_1}(\rho\mathbf{v}v_1)+\frac{\partial}{\partial x_2}(\rho\mathbf{v}\,v_2)+\frac{\partial}{\partial x_3}(\rho\mathbf{v}v_3)=$$

$$=\frac{\partial\boldsymbol{\sigma}_1}{\partial x_1}+\frac{\partial\boldsymbol{\sigma}_2}{\partial x_2}+\frac{\partial\boldsymbol{\sigma}_3}{\partial x_3}+\rho\,\mathbf{F}. \tag{5.3.8}$$

Используя представление (5.2.8) для $f\equiv\mathbf{v}$, получим, что уравнение импульса (5.3.7) может быть представлено в виде

на нормаль к рассматриваемой поверхности не будет браться в скобки: $\boldsymbol{\sigma}_{(n)}\equiv\boldsymbol{\sigma}_n, j_{(n)}\equiv j_n, v_{(n)}\equiv v_n$, и т.д.

$$\rho \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} = \nabla_k \boldsymbol{\sigma}_k + \rho \mathbf{F} \qquad (5.3.9)$$

$$(\rho \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} \equiv \rho(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + v_k \nabla_k \mathbf{v}) \equiv \frac{\partial}{\partial t}(\rho \mathbf{v}) + \nabla_k (\rho\, v_k \mathbf{v})),$$

что можно представить как 2-й закон Ньютона для сплошной среды: сила инерции, равная массе (ρ), умноженной на ускорение $\mathrm{d}\mathbf{v}/\mathrm{d}t$ равна главному вектору внешних сил: поверхностных ($\nabla_k\boldsymbol{\sigma}_k$) и объемных ($\rho\mathbf{F}$).

Нетрудно показать, что

$$\mathbf{v}\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{v}{2}\right)^2 + v_k \nabla_k \left(\frac{v}{2}\right)^2 \equiv \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{v}{2}\right)^2. \qquad (5.3.10)$$

Поэтому если скалярно умножить обе части уравнения (5.3.9) на $\mathbf{v}$, то получим, что из уравнения импульса следует уравнение для кинетической энергии (kinetic energy equation) материальной точки в сплошной среде, которое часто называют уравнением живых сил

$$\rho \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{v}{2}\right)^2 = \mathbf{v} \cdot \nabla_k \boldsymbol{\sigma}_k + \rho\, \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} \equiv v_l \nabla_k \boldsymbol{\sigma}_{kl} + \rho\, F_l\, v_l. \qquad (5.3.11)$$

§ 4. Интегральное и дифференциальное уравнения сохранения момента количества движения

Как и в § 2 гл. 3 (см. 3.2.36) рассмотрим сначала классический случай, когда момент количества движения (momentum of momentum) сплошной среды определяется только полем скоростей $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$, т.е. момент количества в произвольном объеме V относительно начала координат (точки 0), из которой исходит радиус-вектор, равен

$$\mathbf{K} = \int_V [\mathbf{x} \times \mathbf{v}]\, \rho\, \mathrm{d}V. \qquad (5.4.1)$$

Далее будем полагать, что момент внешних сил связан только с поверхностными силами вдоль границы выделенного объема S, описываемыми полем тензора напряжений σ_{kl}, и массовыми силами, описываемыми векторным полем $\rho\mathbf{F}$:

$$\mathbf{M} = \int\limits_S [\mathbf{x} \times \boldsymbol{\sigma}_n]\, \mathrm{d}s + \int\limits_V [\mathbf{x} \times \rho\, \mathbf{F}]\, \mathrm{d}V. \tag{5.4.2}$$

Заметим, что для описания некоторых сплошных сред с ориентированным внутренним микродвижением, преставления (5.4.1) и (5.4.2) приходится обобщать, в частности, учитывать момент количества движения за счет внутренних ориентированных микродвижений, не связанных с полем макроскоростей $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ (см. конец настоящего параграфа). Пока же ограничимся оговоренным в (5.4.1), (5.4.2) представлением, которое будем условно называть классическим представлением момента импульса сплошной среды.

В соответствии с законом сохранения момент количества движения в произвольном фиксированном эйлеровом объеме V_E сплошной среды может меняться за счет конвективного переноса момента количества движения через границу S_E вместе с переносом массы, за счет момента внешних поверхностных сил на границе S_E и момента внешних объемных сил в объеме V_E. Таким образом, *закон сохранения момента количества движения для эйлерового объемав виде интегрального уравнения* имеет вид

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int\limits_{V_E} [\mathbf{x} \times \mathbf{v}]\, \rho\, \mathrm{d}V = - \int\limits_{S_E} \rho\, v_n\, [\mathbf{x} \times \mathbf{v}]\, \mathrm{d}s +$$

$$+ \int\limits_{S_E} [\mathbf{x} \times \boldsymbol{\sigma}_n]\, \mathrm{d}s + \int\limits_{V_E} [\mathbf{x} \times \rho\, \mathbf{F}]\, \mathrm{d}V. \tag{5.4.3}$$

Это балансовое уравнение момента импульса аналогично тому, как это было сделано для балансовых уравнений массы (5.2.2) и импульса (5.3.5), можно интерпретировать следующим высказыванием. Момент импульса внутри фиксированной области пространства может меняться за счет его (момента) переноса через границу вместе с массой и действия моментов внешних сил вдоль границы и действия моментов внешних проникающих в эту область сил со стороны внешнего поля (гравитационного или электромагнитного).

Если поля плотности ρ, скорости $\mathbf{v}$ и напряжений σ_{ik} являются дифференцируемыми, то аналогично (5.2.3) – (5.2.5) и (5.3.6) можно использовать формулу (5.1.8) о дифференцировании интеграла по эйлеровому объему и формулу Гаусса-Остроградского (5.1.25) для приведения поверхностного интеграла от потока к объемному интегралу от дивергенции. Далее используем теорему 3 о равенстве нулю подинтегральной функции. В итоге аналогично (5.2.6) и (5.3.7) получим дифференциальное уравнение сохранения момента импульса (differential equation of momentum conservation) в точке:

$$\frac{\partial}{\partial t}([\mathbf{x} \times \mathbf{v}]\,\rho) + \nabla_k(\rho\, v_k\, [\mathbf{x} \times \mathbf{v}]) = \nabla_k[\mathbf{x} \times \boldsymbol{\sigma}_k] + \rho\, [\mathbf{x} \times \mathbf{F}]. \qquad (5.4.4)$$

Как и для законов сохранения массы и импульса последнее дифференциальное уравнение сохранения момента импульса можно получить, рассматривая произвольный лагранжев объем V_L.

Далее используем следующие соотношения, основанные на дифференцировании (операторы $\partial/\partial t$ и ∇_k) произведений

$$\frac{\partial}{\partial t}[\mathbf{x} \times \mathbf{v}]\,\rho = [\mathbf{x} \times \frac{\partial}{\partial t}\,\rho\,\mathbf{v}], \qquad (5.4.5)$$

$$\nabla_k([\mathbf{x} \times \mathbf{v}]\,\rho\, v_k) = [(\nabla_k\, \mathbf{x}) \times \mathbf{v}]\,\rho\, v_k + [\mathbf{x} \times \nabla_k\,(\mathbf{v}\,\rho\, v_k)].$$

Учтем, что

$$\nabla_k\, \mathbf{x} = \nabla_k\,(x_i\, \mathbf{e}_i) = \mathbf{e}_i\, \nabla_k\, x_i = \mathbf{e}_i\, \delta_{ki} = \mathbf{e}_k,$$

$$\nabla_k[\mathbf{x} \times \boldsymbol{\sigma}_k] = [\nabla_k\, \mathbf{x} \times \boldsymbol{\sigma}_k] + [\mathbf{x} \times \nabla_k\, \boldsymbol{\sigma}_k]. \qquad (5.4.6)$$

Тогда первые слагаемые в последних двух соотношениях преобразуются:

$$[(\nabla_k\, \mathbf{x}) \times \mathbf{v}]\,\rho v_k = [\mathbf{e}_k \times \mathbf{v}]\,\rho v_k = [v_k\, \mathbf{e}_k \times \mathbf{v}]\,\rho = [\mathbf{v} \times \mathbf{v}]\,\rho = 0.$$

$$[(\nabla_k\, \mathbf{x}) \times \boldsymbol{\sigma}_k] = [\mathbf{e}_k \times \boldsymbol{\sigma}_k] = \mathbf{e}_i\, \varepsilon_{ilm}\, \mathbf{e}_{kl}\, \sigma_{mk} = \qquad (5.4.7)$$

$$= \mathbf{e}_i\, \varepsilon_{ilm}\, \delta_{kl}\, \sigma_{mk} = \mathbf{e}_i\, \varepsilon_{ikm}\, \sigma_{km}.$$

Тогда из (5.4.4) получим

$$[\mathbf{x} \times \frac{\partial}{\partial t}(\rho\, \mathbf{v})] + [\mathbf{x} \times \nabla_k(\rho\, v_k\, \mathbf{v})] =$$

$$= [\mathbf{x} \times \nabla_k\, \boldsymbol{\sigma}_k] + [\mathbf{x} \times \rho\, \mathbf{F}] + \mathbf{e}_i\, \varepsilon_{ikm}\, \sigma_{mk}. \qquad (5.4.8)$$

Объединяя все члены с векторным умножением, получим

$$[\mathbf{x} \times (\frac{\partial}{\partial t}\rho\, \mathbf{v} + \nabla_k(\rho\, v_k\, \mathbf{v}) - \nabla_k\, \boldsymbol{\sigma}_k - \rho\, \mathbf{F})] = \mathbf{e}_i\, \varepsilon_{ikm}\, \sigma_{mk}. \qquad (5.4.9)$$

Левая часть этого уравнения равна нулю, что следует из уравнения импульса (5.3.7). В результате дифференциальное уравнение сохранения момента импульса для сплошной среды в рамках классического представления (5.4.1), (5.4.2) сводится к алгебраическому уравнению

$$\varepsilon_{ikm}\,\sigma_{mk} = 0. \tag{5.4.10}$$

Это уравнение для $i = 1, 2, 3$ определяет симметрию тензора напряжений, что уже было показано в (3.2.44) из анализа уравнения момента импульса для малого кубика:

$$\begin{aligned} i = 1:&\quad \sigma_{32} - \sigma_{23} = 0,\\ i = 2:&\quad \sigma_{13} - \sigma_{31} = 0,\\ i = 3:&\quad \sigma_{21} - \sigma_{12} = 0. \end{aligned} \tag{5.4.11}$$

Таким образом, в рамках классического представления момента количества движения сплошной среды (5.4.1) и (5.4.2) закон сохранения момента импульса приводит к симметрии тензора напряжений и не приводит к другим независимым уравнениям.

Рассмотрим момент количества движения малой частицы сплошной среды в малом объеме ΔV. Этот объем мал в том смысле, что его характерный размер Δx много меньше характерного размера L, на котором заметно меняются значения ρ и $\mathbf{v}$. Пусть точка M – центр масс рассматриваемой материальной частицы

$$\mathbf{x}^{(M)}\,\Delta m = \int\limits_{\Delta V} \mathbf{x}\,\rho\,\mathrm{d}V, \qquad \Delta m = \int\limits_{\Delta V} \rho\,\mathrm{d}V, \tag{5.4.12}$$

или, что то же самое, что

$$\int\limits_{\Delta V} \delta\mathbf{x}\,\rho\,\mathrm{d}V = 0 \quad (\delta\mathbf{x} = \mathbf{x} - \mathbf{x}^{(M)}). \tag{5.4.13}$$

Индекс (M) вверху соответствует значению параметра в точке M. Выясним, какой вклад вносит регулярное распределение скоростей в этой малой деформирующейся и вращающейся частице, которое может быть представлено в виде (см. (2.2.16))

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}^{(M)} + (\nabla_k \mathbf{v})^{(M)}\, \delta x_k + \upsilon_0\, \mathrm{O}\left(\left(\frac{\Delta x}{L}\right)^2\right), \tag{5.4.14}$$

на ее момент количества движения. Согласно (5.4.1) имеем

$$\Delta\mathbf{K} = \int\limits_{\Delta V} [\mathbf{x} \times \rho \mathbf{v}]\, \mathrm{d}V = \tag{5.4.15}$$

$$\int\limits_{\Delta V} \left\{ \left[\left(\mathbf{x}^{(M)} + \delta\mathbf{x} \right) \times \left(\mathbf{v}^{(M)} + (\nabla_k \mathbf{v})^{(M)} \delta x_k \right) \right] + \mathbf{x}^{(M)} \upsilon_0 \mathrm{O}\left(\left[\frac{\Delta x}{L} \right]^2 \right) \right\} \rho\, \mathrm{d}V .$$

Заметим, что величины с верхним индексом (M), относящиеся к значениям соответствующих функций в точке M, фиксированы и могут быть вынесены за знак интегрирования

$$\Delta\mathbf{K} = [\mathbf{x}^{(M)} \times \mathbf{v}^{(M)}] \int\limits_{\Delta V} \rho\, \mathrm{d}V +$$

$$+ \left[\left(\int\limits_{\Delta V} \delta\mathbf{x}\, \rho\, \mathrm{d}V \right) \times \mathbf{v}^{(M)} \right] + \left[\mathbf{x}^{(M)} \times (\nabla_k \mathbf{v})^{(M)} \left(\int\limits_{\Delta V} \delta x_k\, \rho\, \mathrm{d}V \right) \right] +$$

$$+ \left[\left(\int\limits_{\Delta V} \delta\mathbf{x}\, \delta x_k \rho\, \mathrm{d}V \right) \times (\nabla_k \mathbf{v})^{(M)} \right] + x^{(M)} \upsilon_0 \int\limits_{\Delta V} \rho\, \mathrm{O}\left(\left(\frac{\Delta x}{L} \right)^2 \right) \mathrm{d}V.$$

Второй и третий интегралы в правой части равны нулю в силу (5.4.13), т.к. δx_k отсчитывается от центра масс. Четвертый и пятый интеграл, учитывая, что $(\nabla_k \upsilon_l)^{(M)} \sim \upsilon_0 / L$, (см. (2.2.16), можно оценить в виде

$$L_\upsilon\, \upsilon_0 \mathrm{O}\left(\left(\frac{\Delta x}{L} \right)^2 \right) \Delta m \;+\; x^{(M)}\, \upsilon_0 \mathrm{O}\left(\left(\frac{\Delta x}{L} \right)^2 \right) \Delta m .$$

В итоге отнесенный к массе малой частицы сплошной среды момент количества движения может быть оценен в виде

$$\frac{\Delta\mathbf{K}}{\Delta m} = [\mathbf{x}^{(M)} \times \mathbf{v}^{(M)}] + L_\upsilon\, \upsilon_0 \mathrm{O}\left(\left(\frac{\delta x}{L_\upsilon} \right)^2 \right) + x^{(M)}\, \upsilon_0 \mathrm{O}\left(\left(\frac{\delta x}{L_\upsilon} \right)^2 \right). \tag{5.4.16}$$

Таким образом, для малой ($\Delta x << L$) материальной частицы с регулярным распределением скоростей в ней (в соответствия с теоремой Коши-Гельмгольца (2.8.15)) момент количества движения определяется движением ее центра масс, а вклад движения относительно центра масс (вращение, деформация и т.д.) на два порядка по размеру частиц ($O((\Delta x/L)^2)$) меньше.

Отсюда следует, что эквивалентным определением классического случая (5.4.1) является задание удельного (отнесенного к единице массы) момента импульса в материальной точке, равному моменту скорости в этой точке:

$$\mathbf{k} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta \mathbf{K}}{\Delta m} = [\mathbf{x}^{(M)} \times \mathbf{v}^{(M)}]. \tag{5.4.17}$$

Среды с внутренними моментами количества движения, поверхностными и объемными парами. В практике встречаются процессы, когда существенным является вклад в момент количества движения среды моментов ориентированных микродвижений – спинов электронов и ядер, момента орбитального движения электронов вокруг своих ядер, вращения дисперсных частиц вокруг своих центров и т.д. (см. рис. 5.4.1), т.е. движений, которые не описываются полем макроскоростей $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$, а наличие указанных микродвижений не вносит вклад в значение средней (макроскопической) скорости.

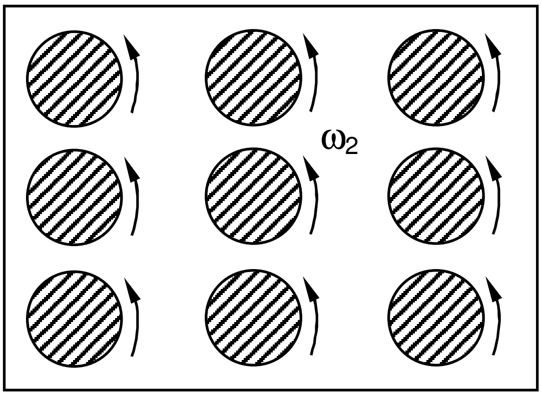

Рис. 5.4.1

На примере, приведенном на рис. 5.4.1, видно, что помимо момента количества движения выделенного элемента среды, связанного с его движением как целого, следует учитывать момент ориентированно вращающихся частиц.

$$\Delta \mathbf{K} = [\mathbf{x} \times \mathbf{v}]\, \rho\, \Delta V + \mathbf{m}\, \Delta V, \quad \mathbf{m} = n\, I\, \boldsymbol{\omega}_2, \tag{5.4.18}$$

где n – числовая концентрация в единице объема вращающихся микрочастиц; I – момент инерции одной микрочастицы относительно ее центра масс; $\boldsymbol{\omega}_2$ – угловая скорость вращения микрочастиц, которая кинематически независима от поля макроскоростей $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$. Может быть, что

$$\omega_2 >> \nabla_k v_j, \quad \omega_2 >> \omega = \tfrac{1}{2}|\mathrm{rot}\,\mathbf{v}|. \tag{5.4.19}$$

При этом величина микровращений ω_2 и концентрация ориентированно вращающихся микрочастиц может быть настолько большой, что, несмотря на малость момента инерции вращающихся микрочастиц I из-за малости их размера (это может быть и размер ориентированных атомов), величина $m = nI\omega_2$ не только превышает вклад второго и третьего слагаемых в выражении (5.4.16), описываемых регулярным полем скоростей $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$, но становится существенной по сравнению с главным, т.е. первым слагаемым. Важно иметь в виду, что наличие плотности внутренних моментов количества движения $\mathbf{m}$ может быть существенным только при выполнении двух необходимых условий. Первое условие – должна быть ориентация микровращений, ибо при отсутствии такой ориентации (например, ориентации заштрихованных частиц на рис. 5.4.1) моменты микровращений скомпенсируют друг друга. Второе условие – угловая скорость микровращений ω_2 должна быть во много раз больше величины угловой скорости вращения $\omega = |\boldsymbol{\omega}|$, описываемого полем скоростей $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$. Таким образом должно выполняться условие (5.4.19), ибо в противном случае ($\omega_2 \sim \omega$) вклад момента микровращений $\mathbf{m}$ не будет превышать момента “макродвижений” частицы относительно ее центра масс, т.е. не будет превышать второе и третье слагаемые (5.4.16) (которые не вносят вклад в баланс моментов в материальной точке), и уравнение симметрии тензора напряжения (5.4.10) сохранится.

Рассмотрим простой эксперимент, в котором проявляется внутренний момент количества движения, иллюстрирующий так называемый гиромагнитный эффект. Пусть в магнитном поле с напряженностью $\mathbf{H}$ подвешен вертикально ферромагнитный стержень. После намагничивания стержня микродвижения внутри доменов материала стержня сориентируются в соответствии с внешним магнитным полем, и внутренний момент количества движения $\mathbf{m}$ в нем станет отличным от нуля и равным $\mathbf{m}(\mathbf{H})$, хотя макроскопическая скорость стержня будет равна нулю, т.е. стержень находится в покое. Если "снять", т.е. отключить источник, создавший магнитное поле, то из-за хаотического теплового движения ориентация микродвижений нарушится, они станут хаотическими и моменты внутренних движений станут равными нулю ($\mathbf{m} = 0$). При этом, так как на стержень не действуют внешние моменты, то полный момент количества движения стержня объема V, равный в общем случае

$$\int_V \rho\,([\mathbf{x}\times\mathbf{v}] + \mathbf{m})\,\mathrm{d}V,$$

должен сохраниться, т.е. остаться равным $\mathbf{m}(\mathbf{H})\cdot V$. Поэтому должен возникнуть момент количества макроскопического движения стержня, и стержень начнет вращаться с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$, определяемой из уравнения сохранения полного момента в двух описанных состояниях: при отключенном магнитном поле ($\mathbf{m} = 0$) и включенном магнитном поле ($\boldsymbol{\omega} = 0$, $\mathbf{m}(\mathbf{H}) \neq 0$)

$$\int_V [\mathbf{x}\times[\mathbf{x}\times\boldsymbol{\omega}]]\,\mathrm{d}V = \mathbf{m}(\mathbf{H})\cdot V.$$

Как видно, в описанном гиромагнитном эффекте существенным является внутренний момент количества микродвижения среды.

Указанные внутренние моменты количества движения, описываемые в механике сплошных сред полем $\mathbf{m}(\mathbf{x}, t)$, могут инициироваться распределенным в среде (аналогично объемным силам) объемными (массовыми) парами $\mathbf{M}(\mathbf{x}, t)$ (например, за счет действия электромагнитного поля), и аналогично поверхностным силам – поверхностными парами $\boldsymbol{\theta}_n = \boldsymbol{\theta}(\mathbf{x}, t, \mathbf{n})$, зависящими не только от координат и времени, но и (аналогично $\boldsymbol{\sigma}_n$) от нормали $\mathbf{n}$ к площадке, где эти пары действуют. Тогда уравнение сохранения момента количества движения (5.4.3) усложняется и принимает вид

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{V_E}\rho\;([\mathbf{x}\times\mathbf{v}] + \mathbf{m})\,\mathrm{d}V = -\int_{S_E}\rho\,\upsilon_n\,([\mathbf{x}\times\mathbf{v}] + \mathbf{m})\,\mathrm{d}s +$$

$$+\int_{S_E}\left([\mathbf{x}\times\boldsymbol{\sigma}_n]+\boldsymbol{\theta}_n\right)\mathrm{d}s+\int_{V_E}\rho\,([\mathbf{x}\times\mathbf{F}]+\mathbf{M})\,\mathrm{d}V. \qquad (5.4.20)$$

Применяя это уравнение к малому тетраэдру аналогично тому (см. § 2 гл. 3), как было показано, что $\boldsymbol{\sigma}_n=\boldsymbol{\sigma}_k\,n_k$, можно показать, что вектор поверхностных моментов также обладает этим свойством:

$$\theta_n\equiv\boldsymbol{\theta}(\mathbf{x},t,\mathbf{n})=\boldsymbol{\theta}_i\,n_i,\quad \boldsymbol{\theta}_i\equiv\boldsymbol{\theta}(\mathbf{x},t,\mathbf{n}),\quad \boldsymbol{\theta}_i=\theta_{mi}\,\mathbf{e}_m, \qquad (5.4.21)$$

и компоненты θ_{mi} образуют тензор второго ранга.

Используя аналогичные выкладки, приведшие от (5.4.3) к (5.4.9), получим

$$[\mathbf{x}\times(\rho\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t}-\nabla_k\,\boldsymbol{\sigma}_k-\rho\,\mathbf{F})]+\rho\frac{\mathrm{d}\mathbf{m}}{\mathrm{d}t}=\nabla_k\,\boldsymbol{\theta}_k+\rho\,\mathbf{M}+\mathbf{e}_i\,\varepsilon_{ikm}\,\sigma_{mk}. \qquad (5.4.22)$$

Учитывая, что выполняется уравнение импульса, получим дифференциальное уравнение внутреннего момента импульса

$$\rho\frac{\mathrm{d}\mathbf{m}}{\mathrm{d}t}=\nabla_k\,\boldsymbol{\theta}_k+\rho\,\mathbf{M}+[\boldsymbol{\sigma}] \qquad (5.4.23)$$

$$([\boldsymbol{\sigma}]\equiv\mathbf{e}_i\,\varepsilon_{ikm}\,\sigma_{mk}\equiv(\sigma_{32}-\sigma_{23})\mathbf{e}_1+(\sigma_{13}-\sigma_{31})\mathbf{e}_2+(\sigma_{21}-\sigma_{12})\mathbf{e}_3).$$

Как видно при наличии внутренних моментов и поверхностных объемных пар, тензор напряжения в общем случае является несимметричным. Раздел механики, учитывающий эти эффекты, называется механикой сплошных сред с внутренними моментами.